ANÁLISIS VECTORIAL

Contenido

Magnitudes escalares y vectoriales

Definiciones

Magnitud física es todo lo que se puede medir, siendo la medida la comparación de una cantidad de cierta magnitud con la unidad elegida para medir ésta. No es una magnitud física el dolor, alegría, tristeza, etc.

Magnitud escalar es una magnitud física que no necesita asociarle una dirección, para que queden completamente especificada.
Ejemplo: *tiempo*, *masa*, *volumen*, *temperatura*.

Magnitud vectorial es una magnitud que para estar completamente especificada es necesario conocer tanto su valor como su dirección de aplicación.
Ejemplo: ***desplazamiento***, ***velocidad***, ***fuerza***, ***campo eléctrico***.

Escalar

Un escalar es aquella magnitud cuyo valor no depende del sistema de coordenadas.

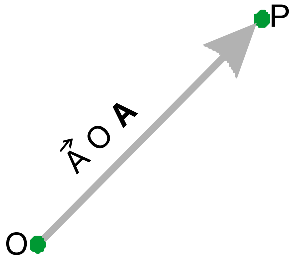
Notación

Los escalares se indican con una letra de tipo ordinario en minúscula (normalmente en itálica) y para operar con ellos se siguen las reglas del álgebra elemental.

Vector

Un **vector** es un ente matemático que representa a las magnitudes vectoriales.

Gráficamente se representa con un segmento orientado que une dos puntos. El punto ***O*** se llama origen o punto de aplicación y el punto ***P*** se denomina extremo del vector. La recta en que se apoya el segmento se llama directriz del vector.



La ***longitud*** o ***módulo*** del vector nos indica, en la escala adoptada para las correspondientes unidades, el valor numérico de la magnitud medida; la ***dirección*** es la de la recta soporte (o directriz del vector), y el ***sentido*** es el indicado por la flecha.

A veces es necesario conocer el punto de aplicación u origen, a partir del cual se mide el módulo.

Notación

La notación empleada para designar a un vector es una letra que hace referencia a la naturaleza física de la magnitud que representa, sobre la cual se coloca un flecha $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{F}$., o bien usando letras del tipo negrita ***v***, ***a***, ***F***.

El módulo se designa con la misma letra pero sin flecha, *v*, *a*, *F*, o bien encerrando entre barras la notación correspondiente al vector $|\vec{v}|,|\vec{a}|,|\vec{F}|$.
Si queremos representar las magnitudes vectoriales haciendo referencia al origen y al extremo del segmento orientado se hace con la notación $\overrightarrow{OP}$.

Ventajas de esta notación

El uso de vectores presenta dos importantes propiedades:

- La notación vectorial es concisa.
- La formulación de las leyes físicas en términos de vectores es independiente de la elección del sistema coordenadas.

Clasificación

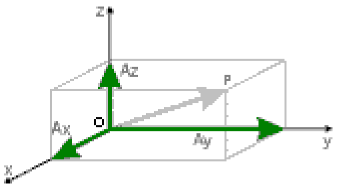
Libres, si no están ligados a un punto ni a una recta, aunque sí a una dirección, y pueden trasladarse paralelamente a sí mismos a un punto origen cualquiera sin que varíe sus efectos.

Deslizantes, si el punto de aplicación puede ser cualquierqa de los puntos de su línea de acción y pueden deslizarse a lo largo de ella.

Fijos, si para su determinación se requiere conocer el punto de aplicación donde actúan.

Componentes rectangulares de un vector

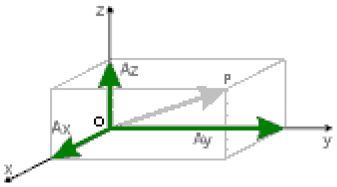
La componente de un vector es la proyección del mismo sobre una línea en el espacio y se obtiene trazando una perpendicular desde el extremo de un vector a la línea.
Las proyecciones del vector $\vec{A}$ sobre los tres ejes coordenados (A_x, A_y, A_z) reciben el nombre de ***componentes rectangulares*****.**



Sistemas de Coordenadas

Sistema Cartesiano

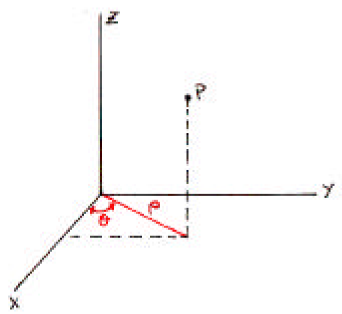
Un sistema particularmente importante es el que resulta al elegir un punto O y una base ortonormal **i**, **j**, **k**, con lo cual quedan definidos tres ejes Ox, Oy, Oz.



Los vectores **i**, **j**, **k** forman entre ellos un ángulo de 90º y su característica principal es que son vectores que no varían su dirección y sentido. Según que la base **i**, **j**, **k** forme un triedro directo o inverso, diremos que su orientación es positiva o negativa.

Sistema Cilíndrico

En este caso el punto en cuestión viene determinado por unas coordenadas denominadas coordenadas cilíndricas ($\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{q}$,**z**).

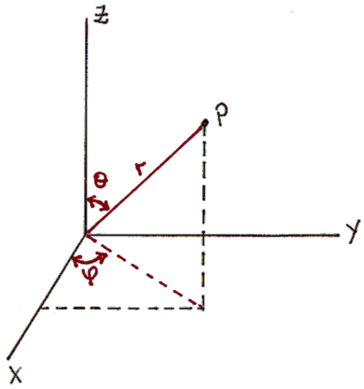


Las ecuaciones que nos permiten pasar de un sistema cartesiano a uno cilíndrico y viceversa son las mostradas a continuación:

$$\begin{cases} x = \boldsymbol{r}\cos\boldsymbol{q} \\ y = \boldsymbol{r}\sin\boldsymbol{q} \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{r} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \boldsymbol{q} = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

Sistema Esférico

En este caso el punto en cuestión viene determinado por unas coordenadas denominadas coordenadas esféricas (**r**,θ ,φ).



y las ecuaciones que relacionan en este caso al sistema cartesiano con el esférico son:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \\ \theta = \cos^{-1}(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \end{cases}$$

Álgebra vectorial

El Álgebra vectorial es un conjunto de definiciones y reglas específicas que nos indican como operar con los vectores. Presentamos a continuación las más importantes:

Definiciones

Vector unitario es cualquier vector que tenga como módulo la unidad.
Si **A** es un vector cualquiera de módulo distinto de 0 y **u** es un vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que **A**, entonces **A** es igual a su módulo multiplicado por **u**.

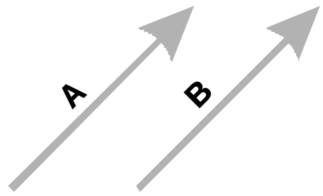
$$\vec{A} = A\vec{u}$$

En el caso del sistema cartesiano estos vectores unitarios son **i**, **j**, **k**

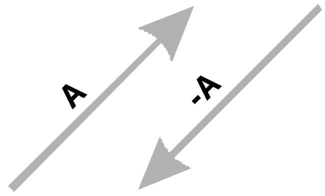
Dos **vectores A** y **B** son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, dirección y sentido, y si además tienen el mismo origen, son **iguales**.

$$\vec{A} = \vec{B}$$

Geométricamente son equipolentes si el polígono que resulta al unir sus orígenes por una parte, y sus extremos por otra es un paralelogramo.



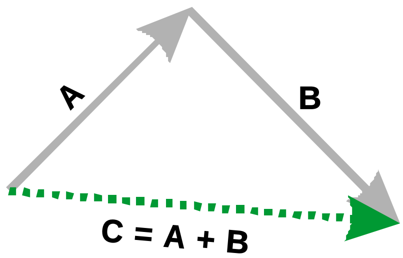
El **vector opuesto** de **A** es **–A**. Es un vector que tiene la misma dirección y módulo, pero con sentido inverso.



Suma / Resta de vectores

La **suma** o **adición** de dos vectores **A** y **B** es otro vector **C** obtenido al trasladar paralelamente el origen de **B** al extremo de **A**, siendo el origen el origen de **A** y su extremo el extremo de **B.**

C = **A** + **B**.



En función de sus componentes:

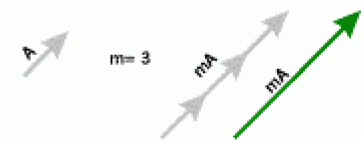
$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})+(B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k})$$
$$=(A_x+B_x)\mathbf{i}+(A_y+B_y)\mathbf{j}+(A_z+B_z)\mathbf{k}$$

La **resta** de dos vectores **A** y **B** se realiza de la misma forma que la suma, salvo que **B** está en sentido opuesto: **C** = **A** - **B** = **A** + (-**B**).

Si **A** = **B** entonces **A** – **B** es igual al **vector nulo** o *cero*, que se representa **0**, o simplemente 0.

Producto / Cociente de un escalar por un vector.

El **producto** de un escalar *m* por un vector **A** es otro vector, *m***A**, que tiene la misma dirección pero con un módulo *m* veces mayor y un sentido igual u opuesto según *m* sea positivo o negativo. Si *m* = 0 entonces *m***A** es el vector nulo.



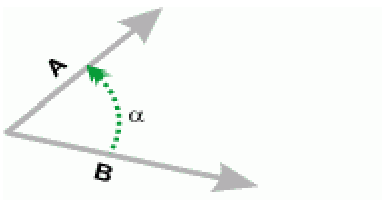
La **división** o **cociente** por un escalar es equivalente a multiplicar el vector por el inverso del escalar.

Propiedades Generales:

- Conmutativa respecto de la suma: **A** + **B** = **B** + **A**
- Asociativa respecto de la suma: **A** + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C**
- El elemento neutro en la suma es el vector nulo **0**: **A** + **0** = **A**
- Conmutativa respecto al producto por un escalar: *m***A** = **A***m*
- El elemento neutro respecto al producto por un escalar: *1* x **A** = **A**
- Distributiva del producto por un escalar respecto a la suma de escalares: (*m* + *n*)**A** = *m***A** + *n***A**
- Distributiva del producto por un escalar respecto a la suma de vectores:*m*(**A** + **B**) = *m***A** + *m***B**

Producto escalar o interno

Dados dos vectores **A** y **B**, su **producto escalar** (o interno) **A**· · **B** se define como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman dichos vectores, dando como resultado un escalar.



$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos \boldsymbol{a}$$

Otra forma de expresar el producto escalar es en función de sus componentes.

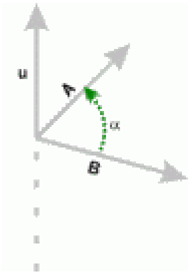
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Propiedades

- Conmutativa: **A** · **B** = **B** · **A**
- Distributiva respecto de la suma: **A** · (**B** + **C**) = **A** · **B** + **A** · **C**

Producto vectorial o externo

Dado dos vectores **A** y **B**, su producto vectorial (o externo) es otro vector **C** = **A** x **B**, su modulo es el producto de módulos por el seno del ángulo que forman, siendo su dirección perpendicular al plano que forman y siendo su sentido tal que **A**, **B**, **C** y forman un triedro a derechas.



$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB\sin a$$

Siendo **u** un vector unitario que indica la dirección y sentido del producto vectorial. Si **A** = **B**, o bien si **A** tiene igual dirección que **B**, sen **AB** = 0, con lo que el producto vectorial es nulo.

En función de sus componentes, puede expresarse mediante el cálculo del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}$$

Propiedades

- No posee la propiedad conmutativa **A** x **B** = **-** **B** x **A**
- Propiedad distributiva respecto de la suma **A** x (**B** + **C**) = **A** x **B** + **A** x **C**
- **m** (A x B) = (**m** A) x B = A x (**m**· B) = (A x B) **m**.
- **i** x **i** = **j** x **j** = **k** x **k** = 0

Productos triples

Por medio de productos escalares y vectoriales de tres vectores **A**, **B**, **C**, se pueden formar productos de la forma (**A** · **B**) · **C**, **A**· (**B** x **C**) y **A** x (**B** x **C**). Se verifican las propiedades siguientes:

- (**A** · **B**) · **C** distinto de **A** · (**B** · **C**).
- **A** · (**B** x **C**) = **B** · (**C** x **A**) = **C** · (**A** x **B**) = volumen de un paralelopipedo de aristas **A**, **B** y **C** con signo positivo o negativo según que **A**, **B** y **C** formen un triedro a derechas o izquierda.
- **A** x (**B** x **C**) es distinto (**A** x **B**) x **C** (el producto vectorial no goza de la propiedad asociativa)
- **A** x (**B** x **C**) = (**A** · **C**) · **B** - (**A** · **B**) · **C**
- (**A** x **B**) x **C** = (**A** · **C**) · **B** - (**B** · **C**) · **A**

Derivada de un vector

Las fórmulas de diferenciación de un vector son análogas a las del cálculo diferencial ordinario.

- Si $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ entonces $d\mathbf{A} = dA_x\mathbf{i} + dA_y\mathbf{j} + dA_z\mathbf{k}$
- $d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = d\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot d\mathbf{B}$
- $d(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = d\mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times d\mathbf{B}$

Integral de un vector

Las fórmulas de integración de un vector son análogas a las del cálculo integral ordinario.

- $\int(\mathbf{u}+\mathbf{v})dt = \int\mathbf{u}dt + \int\mathbf{v}dt$
- $\int l\,\mathbf{u}dt = l\int\mathbf{u}dt$
- $\int_a^b \mathbf{u}dt = -\int_b^a \mathbf{u}dt$

Nociones de Teoría General de Campos

Noción general de Campo

Se llama **Campo**, en general, a toda magnitud física cuyo valor depende del punto considerado en el espacio y del instante que se elija; es decir, son magnitudes que pueden ser expresadas por funciones f(x,y,z,t). Si sólo fuese función del punto considerado en el espacio y no del tiempo, se dice que el ***campo es estacionario o constante***.

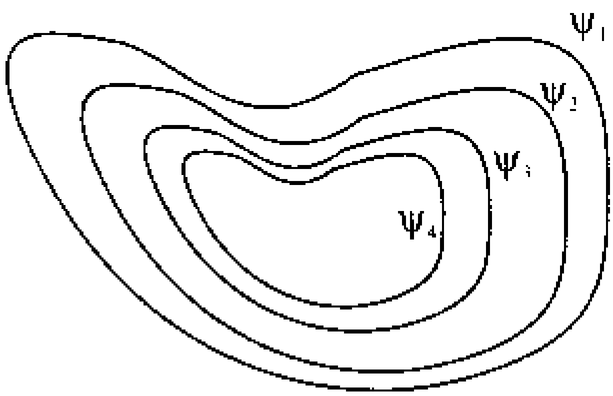
Campo Escalar

Se define **Campo Escalar** a una función que haga corresponder a cada punto (x,y,z) del espacio considerado, el valor de una magnitud física escalar.

$$\boldsymbol{y}(x,y,z)$$

Dicho valor será función de las coordenadas del punto y supondremos que se trata de una función unívoca (a cada punto le corresponde un único valor del campo, pero no viceversa), contínua, derivable hasta el orden que exijan los cálculos.

Los campos admiten una representación gráfica que nos permite obteneruna idea inmediata de algunas características de dicho campo. En el campo escalar estacionario, definido por la función $\boldsymbol{y}(x,y,z)$ se entiende por **superficie de nivel** aquella sobre la cual $\boldsymbol{y}(x,y,z) = \boldsymbol{l}$.

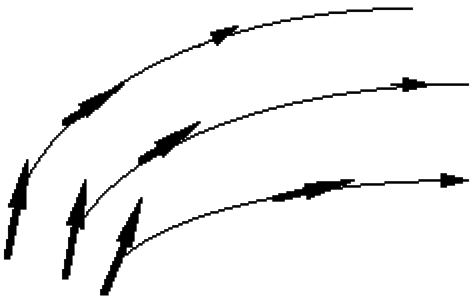


Campo Vectorial

Se dice que en una cierta región del espacio tenemos un **Campo vectorial** cuando a cada punto de dicha región, la magnitud física a estudiar viene definida por una función vectorial.

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z) = \vec{A}(\vec{r})$$

Para obtener una imagen de los campos vectoriales (o representarlos) se dibujan las líneas de campo o líneas vectoriales, que son aquellas que cumplen la condición de que en cada uno de sus puntos el vector $\vec{A}$ es tangente a dicha línea y dirigidas en el sendifo de $\vec{A}$.



Existen campos donde estas líneas son cerradas, es decir, no tienen principio ni fin (Campos solenoidales), mientras que otros tienen lneas que comienzan y acaban en puntos distintos.