

1.11. La clausura de Kleene de un lenguaje

La **clausura de Kleene** o **estrella de Kleene** o simplemente la **estrella** de un lenguaje A , $A \subseteq \Sigma^*$, es la unión de todas las potencias de A y se denota por A^* .

(Descripción 1)

$$A^* = \bigcup_{i \geq 0} A^i = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots \cup A^n \dots$$

A^* se puede describir de la siguiente manera

(Descripción 2)

$$\begin{aligned} A^* &= \text{conjunto de } \textit{todas} \text{ las concatenaciones} \\ &\quad \text{de cadenas de } A, \text{ incluyendo } \lambda \\ &= \{u_1 \cdots u_n : u_i \in A, \quad n \geq 0\} \end{aligned}$$

De manera similar se define la **clausura positiva** de un lenguaje A , $A \subseteq \Sigma^*$, la cual se denota por A^+ .

$$A^+ = \bigcup_{i \geq 1} A^i = A^1 \cup A^2 \cup \dots \cup A^n \dots$$

A^+ se puede describir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A^+ &= \text{conjunto de } \textit{todas} \text{ las concatenaciones de cadenas de } A, \\ &= \{u_1 \cdots u_n : u_i \in A, \quad n \geq 1\} \end{aligned}$$

Obsérvese que $A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$ y que $A^* = A^+$ si y solamente si $\lambda \in A$.

Propiedades de $*$ y $+$. Sea A un lenguaje sobre Σ , es decir, $A \subseteq \Sigma^*$.

1. $A^+ = A^* \cdot A = A \cdot A^*$.
2. $A^* \cdot A^* = A^*$.
3. $(A^*)^n = A^*$, para todo $n \geq 1$.
4. $(A^*)^* = A^*$.
5. $A^+ \cdot A^+ \subseteq A^+$.
6. $(A^*)^+ = A^*$.
7. $(A^+)^* = A^*$.

$$8. \quad (A^+)^+ = A^+.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} 1. \quad A \cdot A^* &= A \cdot (A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots) \\ &= A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots \\ &= A^+. \end{aligned}$$

Similarmente se demuestra que $A^* \cdot A = A^+$.

2. Si $x \in A^* \cdot A^*$, entonces $x = u \cdot v$, con $u \in A^*$, $v \in A^*$. Entonces, $x = u \cdot v$, con $u = u_1 u_2 \dots u_n$, $u_i \in A$, $n \geq 0$ y $v = v_1 v_2 \dots v_m$, $v_i \in A$, $m \geq 0$.

De donde

$$x = u \cdot v = u_1 \cdot u_2 \dots u_n \cdot v_1 \cdot v_2 \dots v_m.$$

con $u_i \in A$, $v_i \in A$, $n \geq 0$. Por lo tanto, x es una concatenación de $n + m$ cadenas de A . Así que $x \in A^*$.

Recíprocamente, si $x \in A^*$, entonces $x = x \cdot \lambda \in A^* \cdot A^*$. Esto prueba la igualdad de los conjuntos $A^* \cdot A^*$ y A^* .

3. Se sigue de la propiedad anterior.

$$\begin{aligned} 4. \quad (A^*)^* &= (A^*)^0 \cup (A^*)^1 \cup (A^*)^2 \cup \dots \\ &= \{\lambda\} \cup A^* \cup A^* \cup A^* \cup \dots \\ &= A^*. \end{aligned}$$

5. La demostración de esta propiedad es similar a la de la propiedad 2, pero con la restricción $m, n \geq 1$. En general, no se tiene la igualdad $A^+ \cdot A^+ = A^+$; más adelante se mostrará un contraejemplo.

$$\begin{aligned} 6. \quad (A^+)^+ &= (A^+)^1 \cup (A^+)^2 \cup (A^+)^3 \cup \dots \\ &= A^* \cup A^* \cup A^* \cup \dots \\ &= A^*. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad (A^+)^* &= (A^+)^0 \cup (A^+)^1 \cup (A^+)^2 \cup \dots \\ &= \{\lambda\} \cup A^+ \cup A^+ A^+ \cup \dots \\ &= A^* \cup (\text{conjuntos contenidos en } A^+) \\ &= A^*. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad (A^+)^+ &= (A^+)^1 \cup (A^+)^2 \cup (A^+)^3 \cup \dots, \\
&= A^+ \cup (\text{conjuntos contenidos en } A^+) \\
&= A^+. \quad \square
\end{aligned}$$

✎ Contraejemplo de $A^+ \cdot A^+ = A^+$. Sea $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{a\}$. Se tiene
 $A^+ = A^1 \cup A^2 \cup \dots = \{a\} \cup \{aa\} \cup \{aaa\} \cup \dots = \{a^n : n \geq 1\}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
A^+ \cdot A^+ &= \{a, a^2, a^3, \dots\} \cdot \{a, a^2, a^3, \dots\} = \{a^2, a^3, a^4, \dots\} \\
&= \{a^n : n \geq 2\}.
\end{aligned}$$

✎ Según las definiciones dadas, Σ^* tiene dos significados:

Σ^* = conjunto de las cadenas sobre el alfabeto Σ .

Σ^* = conjunto de todas las concatenaciones de cadenas de Σ .

No hay conflicto de notaciones porque las dos definiciones anteriores de Σ^* dan lugar al mismo conjunto.

Ejercicio Sean $A, B \subseteq \Sigma^*$. Demostrar que

$$(A \cup B)^* = (A^* B^*)^*.$$

Ayuda: tener en cuenta tanto la **descripción 1** como la **descripción 2** presentadas arriba.