2.11. Teorema de Kleene. Parte II

En esta sección demostraremos que para todo AFN $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \Delta)$ existe una expresión regular R tal que $L(M) = R$.

Un autómata tiene un único estado inicial pero cambiando dicho estado surgen nuevos autómatas. Para cada $q_i \in Q$, sea M_i el autómata que coincide con M pero con estado inicial q_i; más precisamente, $M_i = (\Sigma, Q, q_i, F, \Delta)$. Al lenguaje aceptado por M_i lo denotaremos A_i; es decir, $L(M_i) = A_i$. En particular, $A_0 = L(M)$. Puesto que los estados de aceptación no se han alterado, se tiene que

$$A_i = \{w \in \Sigma^* : \Delta(q_i, w) \cap F \neq \varnothing\}.$$

Cada A_i se puede escribir como

$$A_i = \begin{cases} \bigcup\limits_{a\in\Sigma} \{aA_j : q_j \in \Delta(q_i, a)\}, & \text{si } q_i \notin F, \\ \bigcup\limits_{a\in\Sigma} \{aA_j : q_j \in \Delta(q_i, a)\} \cup \lambda. & \text{si } q_i \in F. \end{cases} \tag{2.1}$$

Si $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$, las igualdades de la forma (2.1) dan lugar a un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas (los A_i):

$$\begin{cases} A_0 &= C_{01}A_0 \cup C_{02}A_1 \cup \cdots \cup \; C_{0n}A_n & (\cup\lambda) \\ A_1 &= C_{11}A_0 \cup C_{12}A_1 \cup \cdots \cup \; C_{1n}A_n & (\cup\lambda) \\ \;\vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots & \vdots \\ A_n &= C_{n1}A_0 \cup C_{n2}A_1 \cup \cdots \cup \; C_{nn}A_n & (\cup\lambda) \end{cases}$$

donde cada coeficiente C_{ij} o es $\varnothing$ o es un símbolo de Σ. El término λ se añade a una ecuación solamente si el estado correspondiente es un estado de aceptación.

Utilizando sucesivas veces el lema de Arden, se puede mostrar que este sistema de ecuaciones siempre se puede solucionar y su solución es única. En efecto, comenzando con la última ecuación, se escribe A_n en términos de los demás A_i, para lo cual se usa el lema de Arden si es necesario. Este valor de A_n se reemplaza en las demás ecuaciones y el sistema se reduce a n ecuaciones con n incógnitas. Similarmente, A_{n-1} se escribe en términos de los demás A_i, usando el lema de Arden si es necesario, y tal valor se reemplaza en las ecuaciones restantes. Prosiguiendo de esta manera, el sistema original se reduce a una sola ecuación cuya incógnita es precisamente A_0. Esta ecuación se soluciona recurriendo una vez más al lema de Arden. Puesto que los coeficientes C_{ij} diferentes de $\varnothing$ son símbolos de Σ, se obtiene una expresión regular R tal que $L(M) = A_0 = R$.

Ejercicio ¿Por qué la anterior demostración no es válida para autómatas con transiciones λ?