3.4. Homomorfismos

Un homomorfismo es una sustitución h que reemplaza cada símbolo a de un alfabeto de Σ por una cadena $h(a) \in \Gamma^*$, donde Γ es otro alfabeto (por supuesto, Σ y Γ pueden ser el mismo alfabeto). Más precisamente, un homomorfismo es una función $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ tal que $h(\lambda) = \lambda$ y para toda cadena $u = a_1a_2 \cdots a_n$, con $a_i \in \Sigma$, se tiene

$$h(a_1a_2 \cdots a_n) = h(a_1)h(a_2) \cdots h(a_n).$$

Un homomorfismo h está completamente determinado por sus imágenes en los símbolos de Σ, es decir, por los valores $h(a)$, con $a \in \Sigma$.

Ejemplo Sean $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{0, 1\}$ y $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ el homomorfismo definido por $h(a) = 0$, $h(b) = 1$ y $h(c) = 010$. El homomorfismo h convierte cadenas de Σ^* en cadenas de Γ^* siguiendo las siguientes reglas: cada a se reemplaza por 0, cada b por 1 y cada c se reemplaza por la cadena 010. Así,

$$h(a^2b^2) = h(aabb) = h(a)h(a)h(b)h(b) = 0011.$$
$$h(acb^2c) = h(a)h(c)h(b)^2h(b) = 001011010.$$

También se deduce fácilmente que $h(a^*b^*c^*) = 0^*1^*(010)^*$.

El siguiente teorema afirma que los homomorfismos preservan lenguajes regulares; dicho de otra manera, la imagen homomorfa de un lenguaje regular es un lenguaje regular.

3.4.1 Teorema. *Sea $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ un homomorfismo.*

(1) *Para cadenas u, $v \in \Sigma^*$ y lenguajes A, $B \subseteq \Sigma^*$ se tiene*

$$\begin{aligned} &h(uv) = h(u)h(v), \\ &h(A \cup B) = h(A) \cup h(B), \\ &h(AB) = h(A)h(B), \\ &h(A^*) = [h(A)]^*. \end{aligned}$$

(2) *Si L es un lenguaje regular sobre Σ, entonces $h(L)$ es un lenguaje regular sobre Γ.*

<u>*Demostración*</u>:

(1) Se sigue directamente de la definición de homomorfismo; los detalles se dejan al lector.

(2) Por inducción sobre el número de operandos (uniones, concatenaciones y estrellas) en la expresión regular que representa a L. La base de la inducción es inmediata ya que $h(\lambda) = \lambda$, para cada $a \in \Sigma$, $h(a)$ es una cadena determinada en Γ^* y $h(\varnothing) = \varnothing$.

La hipótesis de inducción afirma que si L es regular también lo es $h(L)$. Para el paso inductivo se supone, en tres casos, que $L = A \cup B$, $L = AB$ o $L = A^*$. Utilizando la hipótesis de inducción y la parte (1) del presente teorema se llega a la conclusión deseada. $\square$

La parte (2) del teorema 3.4.1 es muy útil para demostrar que ciertos lenguajes no son regulares, razonando por contradicción. En los siguientes ejemplos ilustramos la técnica que se usa en estas situaciones.

Ejemplo Sabiendo que $\{a^i b^i : i \geq 1\}$ no es regular (sección 3.1), podemos concluir que $L = \{0^i 1^i : i \geq 1\}$ tampoco lo es. Razonamos de la siguiente manera: si L fuera regular, lo sería también $h(L)$ donde h es el homomorfismo $h(0) = a$, $h(1) = b$. Pero $h(L) = \{h(0)^i h(1)^i : i \geq 1\} = \{a^i b^i : i \geq 1\}$. Por consiguiente, L no es regular.

Ejemplo $L = \{0^n 2 1^n : n \geq 1\}$ no es regular; si lo fuera, $h(L)$ también lo sería, donde h es el homomorfismo $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $h(2) = \lambda$. Pero $h(L) = \{0^n 1^n : n \geq 1\}$ no es regular, como se dedujo en el ejemplo anterior.

Ejercicios de la sección 3.4

1. Llenar los detalles de la demostración de la parte (1) del teorema 3.4.1.

2. Utilizar homomorfismos y el hecho de que $\{a^i b^i : i \geq 1\}$ y $\{0^i 1^i : i \geq 1\}$ no son regulares para concluir que los siguientes lenguajes tampoco son regulares:

   (i) $L = \{a^i c b^j : i, j \geq 1,\ i \neq j\}$, sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$.

   (ii) $L = \{a^i b^i c^i : i \geq 1\}$, sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$.

   (iii) $L = \{a^i b^j c^i : i, j \geq 1\}$, sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$.

   (iv) $L = \{0^i 1^j 2^k : i, j, k \geq 0,\ i + j = k\}$, sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$.