Capítulo 3

Otras propiedades de los lenguajes regulares

En los dos capítulos anteriores hemos presentado las propiedades básicas de los lenguajes regulares pero no hemos visto cómo se puede demostrar que un lenguaje no es regular. El llamado "lema de bombeo", expuesto en este capítulo, sirve para tal propósito. También veremos que la regularidad es una propiedad que se preserva por las operaciones booleanas usuales, por homomorfismos y por las imágenes inversas de homomorfismos. Finalmente, analizaremos ciertos problemas de decisión referentes a autómatas y a lenguajes regulares.

3.1. Lema de bombeo

El llamado "lema de bombeo" (*pumping lemma*, en inglés) es una propiedad de los lenguajes regulares que es muy útil para demostrar que ciertos lenguajes no son regulares.

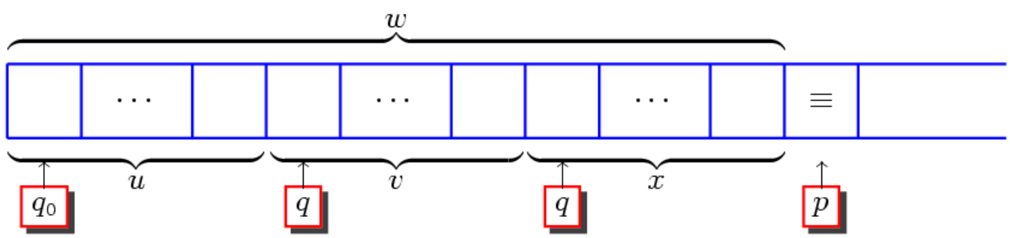
3.1.1. Lema de bombeo. *Para todo lenguaje regular L (sobre un alfabeto dado Σ) existe una constante $n \in \mathbb{N}$, llamada constante de bombeo para L, tal que toda cadena $w \in L$, con $|w| \geq n$, satisface la siguiente propiedad:*

$$(B)\ \begin{cases} w \text{ se puede descomponer como } w = uvx, \text{ con } |uv| \leq n, \\ v \neq \lambda, \text{ y para todo } i \geq 0 \text{ se tiene } uv^i x \in L. \end{cases}$$

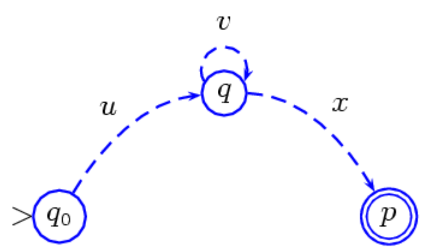
<u>*Demostración*</u>: Por el Teorema de Kleene y por los teoremas de equivalencia de los modelos AFD, AFN y AFN-λ, existe un AFD M tal que $L(M) = L$. Sea

$$n = \# \text{ de estados de } M.$$

Si $w \in L$ y $|w| \geq n$, entonces durante el procesamiento completo de w, hay por lo menos un estado que se repite. Sea q el primer estado que se repite. Tal como se muestra en la siguiente gráfica, w se puede descomponer como $w = uvx$, donde $|uv| \leq n$, $v \neq \lambda$.



Nótese que tanto u como x pueden ser la cadena vacía λ, pero $v \neq \lambda$. Además, la cadena v se puede "bombear", en el sentido de que uv^ix es aceptada por M para todo $i \geq 0$. En el diagrama de estados, se puede visualizar esta propiedad de bombeo de v:



Uso del lema de bombeo. El lema de bombeo se puede usar para concluir que un cierto lenguaje dado L no es regular, recurriendo a un razonamiento por contradicción (o reducción al absurdo). El razonamiento utilizado tiene la siguiente forma:

1. Si L fuera regular, existiría una constante de bombeo n para L.

2. Se escoge una cadena "adecuada" $w \in L$ y se aplica la propiedad (B) del lema de bombeo, descomponiendo w como

$$w = uvx, \quad v \neq \lambda, \quad |uv| \leq n.$$

3. Se llega a la siguiente contradicción:

   (I) Por el lema de bombeo, $uv^ix \in L$, para todo $i \geq 0$.

(II) uv^ix no puede estar en L, para algún $i \in I$. Por lo general, basta escoger valores pequeños de i como $i = 0$ ó $i = 2$.

Ejemplo Usar el lema de bombeo para demostrar que el lenguaje $L = \{a^i b^i : i \geq 0\}$ no es regular.

Solución: Si L fuera regular, existiría una constante de bombeo n para L. Sea $w = a^n b^n \in L$. Entonces w se puede descomponer como $w = uvx$, con $|v| \geq 1$ y $|uv| \leq n$. Por lo tanto, u y v constan únicamente de $a$es:

$$\begin{aligned} u &= a^r, \qquad \text{para algún } r \geq 0, \\ v &= a^s, \qquad \text{para algún } s \geq 1. \end{aligned}$$

Entonces,

$$x = a^{n-(r+s)} b^n = a^{n-r-s} b^n.$$

Por el lema de bombeo, $uv^ix \in L$ para todo $i \geq 0$. En particular, si $i = 0$, $ux \in L$. Pero $ux = a^r a^{n-r-s} b^n = a^{n-s} b^n$. Como $n - s \neq n$, la cadena $ux \notin L$ lo cual es una contradicción. Se concluye entonces que L no puede ser regular.

Tomando $i = 2$ también se llega a una contradicción: por un lado, $uv^2x \in L$, pero

$$uv^2x = a^r a^s a^s a^{n-r-s} b^n = a^{r+2s+n-r-s} b^n = a^{n+s} b^n.$$

Como $s \geq 1$, $a^{n+s} b^n$ no está en L.

El argumento anterior también sirve para demostrar que el lenguaje $L = \{a^i b^i : i \geq 1\}$ no es regular.

Ejemplo Demostrar que el lenguaje de los palíndromos sobre $\{a, b\}$ no es un lenguaje regular. Recuérdese que un **palíndromo** es una cadena w tal que $w = w^R$.

Solución: Si L fuera regular, existiría una constante de bombeo n para L. Sea $w = a^n b a^n \in L$. Entonces w se puede descomponer como $w = uvx$, con $|v| \geq 1$, $|uv| \leq n$, y para todo $i \geq 0$, $uv^ix \in L$. Por lo tanto, u y v constan únicamente de $a$es:

$$\begin{aligned} u &= a^r, \qquad \text{para algún } r \geq 0, \\ v &= a^s, \qquad \text{para algún } s \geq 1. \end{aligned}$$

Entonces,

$$x = a^{n-(r+s)} b a^n = a^{n-r-s} b a^n.$$

Tomando $i = 0$, se concluye que $ux \in L$, pero

$$ux = a^r a^{n-r-s} b a^n = a^{n-s} b a^n.$$

Como $s \geq 1$, $a^{n-s}ba^n$ no es un palíndromo. Esta contradicción muestra que L no puede ser regular.

Ejemplo Demostrar que el lenguaje $L = \{a^{i^2} : i \geq 0\}$ no es regular. L está formado por cadenas de $a$es cuya longitud es un cuadrado perfecto.

Solución: Si L fuera regular, existiría una constante de bombeo n para L. Sea $w = a^{n^2} \in L$. Entonces w se puede descomponer como $w = uvx$, con $|v| \geq 1$, $|uv| \leq n$. Por el lema de bombeo, $uv^2x \in L$, pero por otro lado,

$$n^2 < n^2 + |v| = |uvx| + |v| = |uv^2x| \leq n^2 + |uv| \leq n^2 + n < (n+1)^2.$$

Esto quiere decir que el número de símbolos de la cadena uv^2x no es un cuadrado perfecto y, por consiguiente, $uv^2x \notin L$. En conclusión, L no es regular.

Ejercicios de la sección 3.1

1. Usar el lema de bombeo para demostrar que los siguientes lenguajes no son regulares:

   (i) $L = \{w \in \{a,b\}^* : w$ tiene el mismo número de $a$es que de $b$es$\}$.
   (ii) $L = \{a^iba^i : i \geq 1\}$, sobre $\Sigma = \{a,b\}$.
   (iii) $L = \{a^ib^ja^i : i,j \geq 0\}$, sobre $\Sigma = \{a,b\}$.
   (iv) $L = \{0^i1^{2i} : i \geq 0\}$, sobre $\Sigma = \{0,1\}$.
   (v) $L = \{1^i01^i0 : i \geq 1\}$, sobre $\Sigma = \{0,1\}$.
   (vi) $L = \{a^ib^jc^{i+j} : i,j \geq 0\}$, sobre $\Sigma = \{a,b,c\}$.
   (vii) $L = \{a^ib^j : j > i \geq 0\}$, sobre $\Sigma = \{a,b\}$.
   (viii) $L = \{ww : w \in \Sigma^*\}$, siendo $\Sigma = \{a,b\}$.
   (ix) $L = \{ww^R : w \in \Sigma^*\}$, siendo $\Sigma = \{a,b\}$.
   (x) $L = \{a^i : i$ es un número primo$\}$, sobre $\Sigma = \{a\}$.

2. ¿Es $L = \{(ab)^i : i \geq 0\}$ un lenguaje regular?

3. Encontrar la falacia en el siguiente argumento: “Según la propiedad (B) del enunciado del lema de bombeo, se tiene que $uv^ix \in L$ para todo $i \geq 0$. Por consiguiente, L posee infinitas palabras y, en conclusión, todo lenguaje regular es infinito.”