

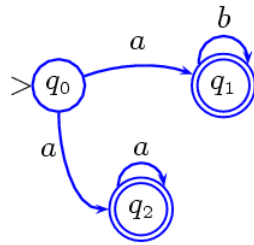
2.5. Equivalencia computacional entre los AFD y los AFN

En esta sección se mostrará que los modelos AFD y AFN son computacionalmente equivalentes. En primer lugar, es fácil ver que un AFD $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ puede ser considerado como un AFN $M' = (\Sigma, Q, q_0, F, \Delta)$ definiendo $\Delta(q, a) = \{\delta(q, a)\}$ para cada $q \in Q$ y cada $a \in \Sigma$. Para la afirmación recíproca tenemos el siguiente teorema.

2.5.1 Teorema. *Dado un AFN $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \Delta)$ se puede construir un AFD M' **equivalente** a M , es decir, tal que $L(M) = L(M')$.*

Este teorema, cuya demostración se dará en detalle más adelante, establece que el no-determinismo se puede eliminar. Dicho de otra manera, los autómatas deterministas y los no deterministas aceptan los mismos lenguajes. La idea de la demostración consiste en considerar cada conjunto de estados $\{p_1, \dots, p_j\}$, que aparezca en la tabla de la función Δ del autómata no-determinista, como un *único* estado del nuevo autómata determinista. La tabla de Δ se completa hasta que no aparezcan nuevas combinaciones de estados. Los estados de aceptación del nuevo autómata son los conjuntos de estados en los que aparece *por lo menos* un estado de aceptación del autómata original. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

Ejemplo Consideremos el AFN M , presentado en la sección 2.4, que acepta el lenguaje $L(M) = ab^* \cup a^+$ sobre $\Sigma = \{a, b\}$:

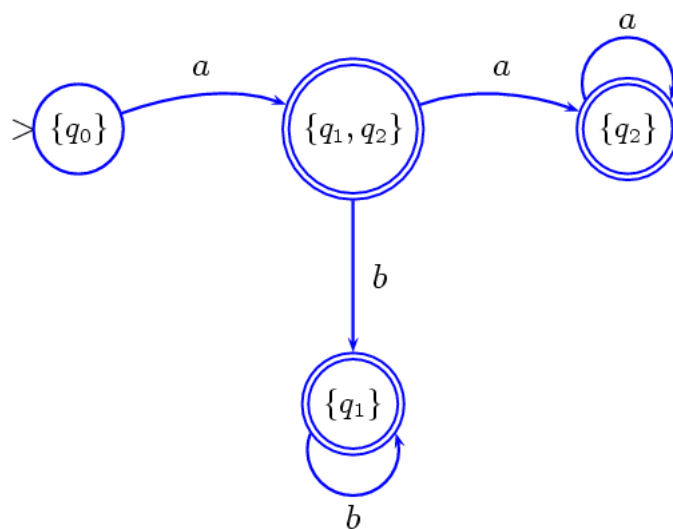


Δ	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	\emptyset
q_1	\emptyset	$\{q_1\}$
q_2	$\{q_2\}$	\emptyset

El nuevo AFD M' construido a partir de M tiene un estado más, $\{q_1, q_2\}$, y su función de transición δ tiene el siguiente aspecto:

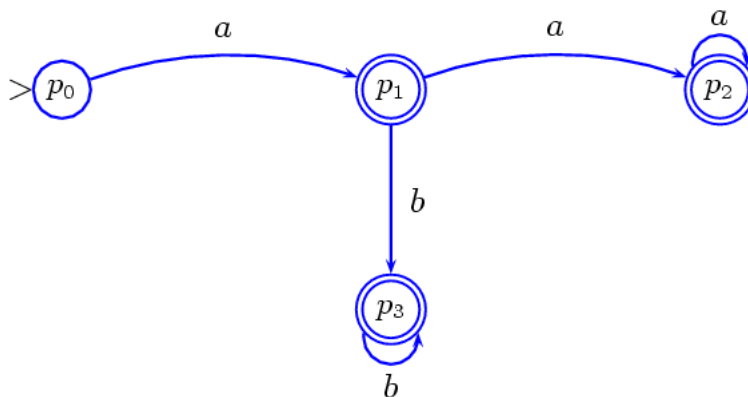
δ	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	\emptyset
q_1	\emptyset	$\{q_1\}$
q_2	$\{q_2\}$	\emptyset
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$

El diagrama de estados de este autómata es:



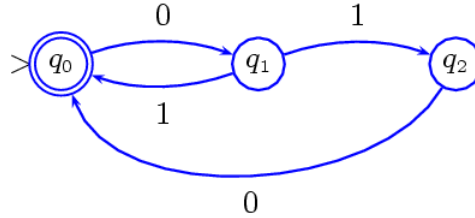
Los estados de aceptación son aquéllos en los que aparezcan q_1 ó q_2 , que son los estados de aceptación del autómata original.

Para mayor simplicidad, podemos cambiar los nombres de los estados del nuevo autómata:



Ejemplo

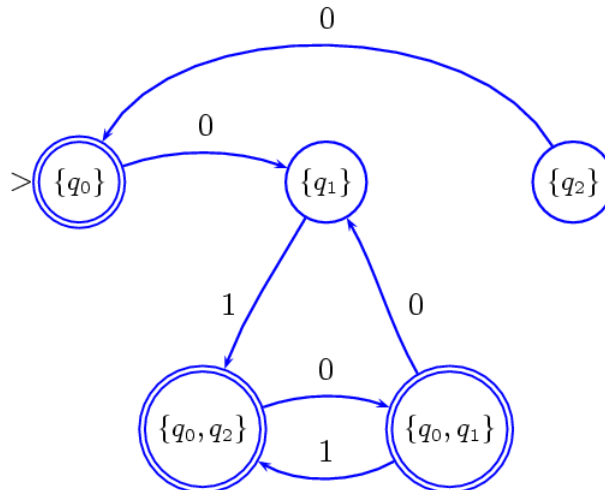
El siguiente AFN M , presentado en la la sección 2.4, acepta el lenguaje $L = (01 \cup 010)^*$ sobre $\Sigma = \{0, 1\}$.



La tabla de la función de transición de M se extiende para completar la función δ del nuevo AFN:

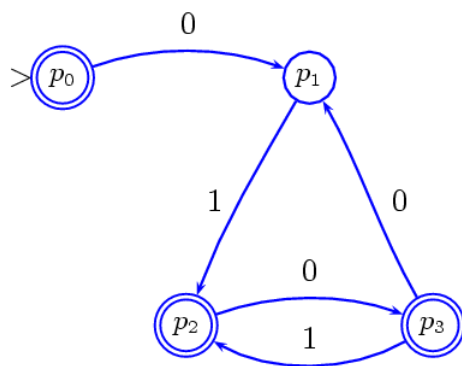
δ	0	1
q_0	$\{q_1\}$	\emptyset
q_1	\emptyset	$\{q_0, q_2\}$
q_2	$\{q_0\}$	\emptyset
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	\emptyset
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

El diagrama de estados del nuevo autómata es:



Los estados de aceptación son aquéllos en los que aparezca q_0 ya que q_0 es el único estado de aceptación del autómata original.

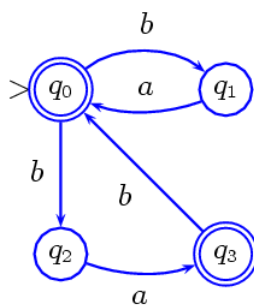
Puesto que el nuevo estado $\{q_2\}$ no interviene en el lenguaje aceptado, el nuevo autómata se puede simplificar en la siguiente forma:



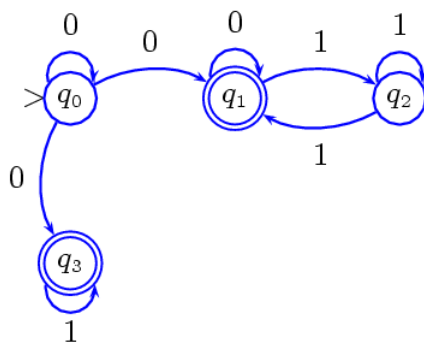
Ejercicios

Diseñar AFD equivalentes a los siguientes AFN:

1.



2.



Para la demostración del [teorema 2.5.1](#), conviene extender la definición de la función de transición, tanto de los autómatas deterministas como de los no-deterministas.

2.5.2 Definición. Sea $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ un AFD. La función de transición $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ se extiende a una función $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \longrightarrow Q$ por medio de la siguiente definición recursiva:

$$\begin{cases} \widehat{\delta}(q, \lambda) = q, & q \in Q, \\ \widehat{\delta}(q, a) = \delta(q, a), & q \in Q, a \in \Sigma, \\ \widehat{\delta}(q, wa) = \delta(\widehat{\delta}(q, w), a), & q \in Q, a \in \Sigma, w \in \Sigma^*. \end{cases}$$

Según esta definición, para una cadena de entrada $w \in \Sigma^*$, $\widehat{\delta}(q_0, w)$ es el estado en el que el autómata termina el procesamiento de w . Por lo tanto, podemos describir el lenguaje aceptado por M de la siguiente forma:

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_0, w) \in F\}.$$

Notación. Sin peligro de ambigüedad, la función extendida $\widehat{\delta}(q, w)$ se notará simplemente $\delta(q, w)$.

2.5.3 Definición. Sea $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \Delta)$ un AFN. La función de transición $\Delta : Q \times \Sigma \longrightarrow \wp(Q)$ se extiende inicialmente a conjuntos de estados. Para $a \in \Sigma$ y $S \subseteq F$ se define

$$\Delta(S, a) := \bigcup_{q \in S} \Delta(q, a).$$

Luego se extiende Δ a una función $\widehat{\Delta} : Q \times \Sigma^* \longrightarrow \wp(Q)$, de manera similar a como se hace para los AFD. Recursivamente,

$$\begin{cases} \widehat{\Delta}(q, \lambda) = \{q\}, & q \in Q, \\ \widehat{\Delta}(q, a) = \Delta(q, a), & q \in Q, a \in \Sigma, \\ \widehat{\Delta}(q, wa) = \Delta(\widehat{\Delta}(q, w), a) = \bigcup_{p \in \widehat{\Delta}(q, w)} \Delta(p, a), & q \in Q, a \in \Sigma, w \in \Sigma^*. \end{cases}$$

Según esta definición, para una cadena de entrada $w \in \Sigma^*$, $\widehat{\Delta}(q_0, w)$ es el conjunto de los posibles estados en los que terminan los cálculos *completos* de w . Si el cálculo se aborta durante el procesamiento de w , se tendría $\widehat{\Delta}(q_0, w) = \emptyset$. Usando la función extendida $\widehat{\Delta}$, el lenguaje aceptado por M se puede describir de la siguiente forma:

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* : \widehat{\Delta}(q_0, w) \text{ contiene un estado de aceptación}\}.$$

Notación. Sin peligro de ambigüedad, la función extendida $\widehat{\Delta}(q, w)$ se notará simplemente $\Delta(q, w)$.

Demostración del Teorema 2.5.1:

Dado el AFN $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \Delta)$, construimos el AFD M' así:

$$M' = (\Sigma, \wp(Q), \{q_0\}, F', \delta)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta : \wp(Q) \times \Sigma &\longrightarrow \wp(Q) \\ (S, a) &\longmapsto \delta(S, a) := \Delta(S, a). \end{aligned}$$

$$F' = \{S \subseteq \wp(Q) : S \text{ contiene al menos un estado de aceptación}\}.$$

Se demostrará que $L(M) = L(M')$ probando que, para toda cadena $w \in \Sigma^*$, $\delta(\{q_0\}, w) = \Delta(q_0, w)$. Esta igualdad se demostrará por inducción sobre w .

Para $w = \lambda$, claramente se tiene $\delta(\{q_0\}, \lambda) = \Delta(q_0, \lambda) = \{q_0\}$.

Para $w = a$, $a \in \Sigma$, se tiene

$$\delta(\{q_0\}, a) = \Delta(\{q_0\}, a) = \Delta(q_0, a).$$

Supóngase (hipótesis de inducción) que $\delta(\{q_0\}, w) = \Delta(q_0, w)$, y que $a \in \Sigma$.

$$\begin{aligned} \delta(\{q_0\}, wa) &= \delta(\delta(\{q_0\}, w), a) && \text{(definición de la extensión de } \delta) \\ &= \delta(\Delta(\{q_0\}, w), a) && \text{(hipótesis de inducción)} \\ &= \Delta(\Delta(\{q_0\}, w), a) && \text{(definición de } \delta) \\ &= \Delta(\{q_0\}, wa) && \text{(definición de la extensión de } \Delta) \\ &= \Delta(q_0, wa) && \text{(definición de la extensión de } \Delta) \end{aligned}$$

Esto demuestra el teorema. □