5.4. Autómatas con pila y LIC (Parte I)

Los lenguajes aceptados por los AFPN son exactamente los lenguajes independientes del contexto. Éste es un resultado análogo al Teorema de Kleene para lenguajes regulares, aunque en el caso de los autómatas con pila, los modelos deterministas no son computacionalmente equivalentes a los no-deterministas. En la presente sección consideraremos la primera parte de la correspondencia entre AFPN y LIC.

5.4.1 Teorema. *Dada una GIC G, existe un AFPN M tal que $L(G) = L(M)$.*

Bosquejo de la demostración. Para una gramática $G = (\Sigma, V, S, P)$ dada, se construye un AFPN que utiliza la pila para simular la derivación de cadenas realizada por G. M requiere solamente tres estados, independientemente del número de variables y producciones de G. Específicamente, el autómata M se define como $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, s_0, \Delta)$, donde $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $F = \{q_2\}$ y $\Gamma = \Sigma \cup V \cup \{s_0\}$. La función de transición Δ se define de la siguiente manera:

1. $\Delta(q_0, \lambda, s_0) = \{(q_1, Ss_0)\}$. Transición λ mediante la cual M coloca el símbolo S en el tope de la pila al iniciar el procesamiento de una cadena de entrada.

2. Para cada variable $A \in V$,

   $$\Delta(q_1, \lambda, A) = \{(q_1, u) : A \to u \text{ es una producción de la gramática } G\}.$$

   Mediante estas transiciones, M utiliza la pila para simular las derivaciones: si el tope de la pila es A y en la derivación se usa la producción $A \to u$, el tope de la pila A es substituido por u.

3. Para cada símbolo terminal $a \in \Sigma$, $\Delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \lambda)\}$. Mediante estas transiciones, M borra los terminales del tope de la pila al consumirlos sobre la cinta de entrada.

4. $\Delta(q_1, \lambda, s_0) = \{(q_2, s_0)\}$. M ingresa al estado de aceptación q_2 cuando detecta el marcador de fondo s_0.

El autómata M está diseñado de tal forma que si $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$ es una derivación a izquierda en la gramática G, entonces existe un procesamiento

$$(q_0, w, s_0) \vdash (q_1, w, Ss_0) \stackrel{*}{\vdash} (q_2, \lambda, s_0)$$

que simula la derivación.

Recíprocamente, puede demostrarse que si $(q_0, w, s_0) \overset{*}{\vdash} (q_2, \lambda, s_0)$ entonces $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ en la gramática G. $\square$

Ejemplo Sea G la gramática:

$$G : \begin{cases} S \to aAbS \mid bBa \mid \lambda \\ A \to aA \mid a \\ B \to bB \mid b \end{cases}$$

Según la construcción del Teorema 5.4.1, M está dado por $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, s_0, \Delta)$ donde

$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_1, q_2\}, \\ F &= \{q_2\}, \\ \Gamma &= \{a, b, S, A, B, s_0\}. \end{aligned}$$

La función de transición Δ está dada por:

$$\begin{aligned} \Delta(q_0, \lambda, s_0) &= \{(q_1, Ss_0)\}, \\ \Delta(q_1, \lambda, S) &= \{(q_1, aAbS), (q_1, bBa), (q_1, \lambda)\}, \\ \Delta(q_1, \lambda, A) &= \{(q_1, aA), (q_1, a)\}, \\ \Delta(q_1, \lambda, B) &= \{(q_1, bB), (q_1, b)\}, \\ \Delta(q_1, a, a) &= \{(q_1, \lambda)\}, \\ \Delta(q_1, b, b) &= \{(q_1, \lambda)\}, \\ \Delta(q_1, \lambda, s_0) &= \{(q_2, s_0)\}. \end{aligned}$$

Podemos ilustrar la correspondencia entre derivaciones en G y procesamientos en M con la cadena $aabbba$, la cual tiene la siguiente derivación a izquierda:

$$S \Rightarrow aAbS \Rightarrow aabS \Rightarrow aabbBa \Rightarrow aabbba.$$

El autómata M simula esta derivación de la cadena $aabbba$ así:

$$\begin{aligned} (q_0, aabbba, s_0) &\vdash (q_1, aabbba, Ss_0) \vdash (q_1, aabbba, aAbSs_0) \\ &\vdash (q_1, abbba, AbSs_0) \vdash (q_1, abbba, abSs_0) \\ &\vdash (q_1, bbba, bSs_0) \vdash (q_1, bba, Ss_0) \vdash (q_1, bba, bBas_0) \\ &\vdash (q_1, ba, Bas_0) \vdash (q_1, ba, bas_0) \vdash (q_1, a, as_0) \\ &\vdash (q_1, \lambda, s_0) \vdash (q_2, \lambda, s_0). \end{aligned}$$

Ejemplo La siguiente gramática genera los palíndromos de longitud par, sobre $\Sigma = \{a, b\}$, es decir, el lenguaje $L = \{ww^R : w \in \Sigma^*\}$:

$$S \to aSa \mid bSb \mid \lambda.$$

Siguiendo el procedimiento del Teorema 5.4.1 podemos construir un AFPN que acepta a L; este autómata es diferente del exhibido en el tercer ejemplo de la sección 5.2 . $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, s_0, \Delta)$ donde

$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_1, q_2\}, \\ F &= \{q_2\}, \\ \Gamma &= \{a, b, S, s_0\}. \end{aligned}$$

La función de transición Δ está dada por:

$$\begin{aligned} \Delta(q_0, \lambda, s_0) &= \{(q_1, Ss_0)\}, \\ \Delta(q_1, \lambda, S) &= \{(q_1, aSa), (q_1, bSb), (q_1, \lambda)\}, \\ \Delta(q_1, a, a) &= \{(q_1, \lambda)\}, \\ \Delta(q_1, b, b) &= \{(q_1, \lambda)\}, \\ \Delta(q_1, \lambda, s_0) &= \{(q_2, s_0)\}. \end{aligned}$$

Ejercicios de la sección 5.4

1. Construir un AFPN M que acepte el lenguaje generado por la siguiente gramática:

$$G: \quad \begin{cases} S \to Aba \mid AB \mid \lambda \\ A \to aAS \mid a \\ B \to bBA \mid \lambda. \end{cases}$$

   Encontrar una derivación a izquierda en G de la cadena $w = aaababa$ y procesar luego la cadena w con el autómata M, simulando la derivación.

2. Construir un AFPN M que acepte el lenguaje generado por la siguiente gramática:

$$G: \quad \begin{cases} S \to ASA \mid AaA \mid aa \\ A \to AbA \mid \lambda. \end{cases}$$

   Encontrar una derivación a izquierda en G de la cadena $w = bbaaa$ y procesar luego la cadena w con el autómata M, simulando la derivación.