2.8. Teorema de Kleene. Parte I

En las secciones anteriores se ha mostrado la equivalencia computacional de los modelos AFD, AFN y AFN-λ, lo cual puede ser descrito en la forma:

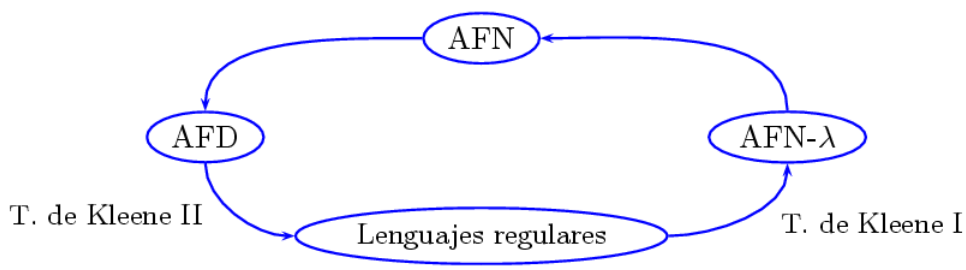
$$\boxed{\text{AFD} \equiv \text{AFN} \equiv \text{AFN-}\lambda}$$

Esto quiere decir que para cada autómata de uno de estos tres modelos se pueden construir autómatas equivalentes en los otros modelos. Por lo tanto, los modelos AFD, AFN y AFN-λ aceptan exactamente los mismos lenguajes. El teorema de Kleene establece que tales lenguajes son precisamente los lenguajes regulares.

2.8.1. ***Teorema de Kleene.*** *Un lenguaje es regular si y sólo si es aceptado por un autómata finito (AFD o AFN o AFN-λ).*

Para demostrar el teorema consideraremos las dos direcciones por separado. Primero demostraremos que para un lenguaje regular L dado existe un AFN-λ tal que $L(M) = L$. En la sección 2.11 demostraremos que, a partir de un AFD M, se puede encontrar una expresión regular R tal que $L(M) = R$. En ambas direcciones las demostraciones son constructivas.

Las construcciones de este capítulo se pueden presentar así:



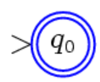
Parte I. Dada una expresión regular R sobre un alfabeto Σ, se puede construir un AFN-λ M tal que el lenguaje aceptado por M sea exactamente el lenguaje representado por R.

$$\text{Expresión regular } R \xrightarrow[\text{algorítmico}]{\text{Procedimiento}} \boxed{\text{AFN-}\lambda \quad ^{\text{M}}} \quad \text{tal que } L(M) = R.$$

<u>*Demostración*</u>: Puesto que la definición de las expresiones regulares se hace recursivamente, la demostración se lleva a cabo razonando por inducción sobre R. Para las expresiones regulares básicas, podemos construir fácilmente autómatas que acepten los lenguajes representados. Así, el autómata

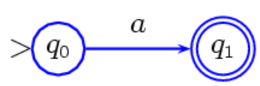
acepta el lenguaje $\varnothing$, es decir, el lenguaje representado por la expresión regular $R = \varnothing$.

El autómata



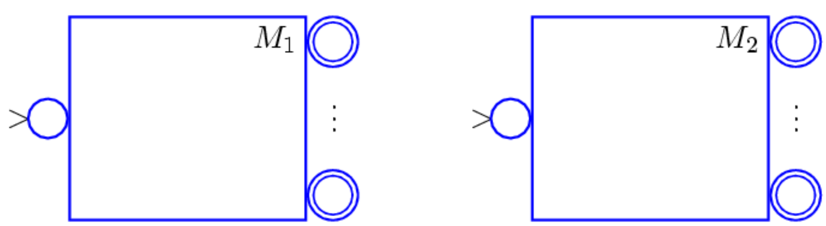
acepta el lenguaje $\{\lambda\}$, es decir, el lenguaje representado por la expresión regular $R = \lambda$.

El autómata



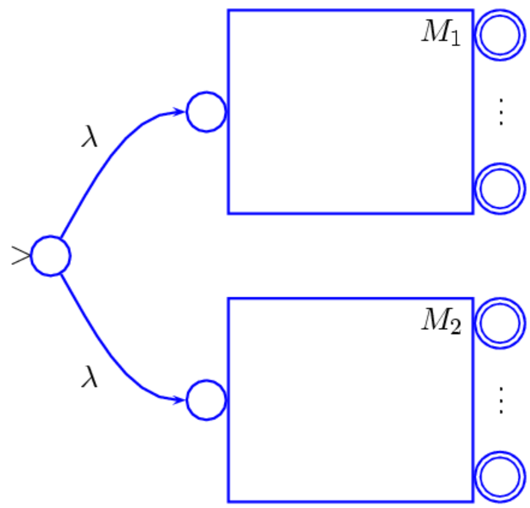
acepta el lenguaje $\{a\}$, $a \in \Sigma$, es decir, el lenguaje representado por la expresión regular $R = a$.

Paso inductivo: supóngase que para las expresiones regulares R y S existen AFN-λ M_1 y M_2 tales que $L(M_1) = R$ y $L(M_2) = S$. Esquemáticamente vamos a presentar los autómatas M_1 y M_2 en la siguiente forma:

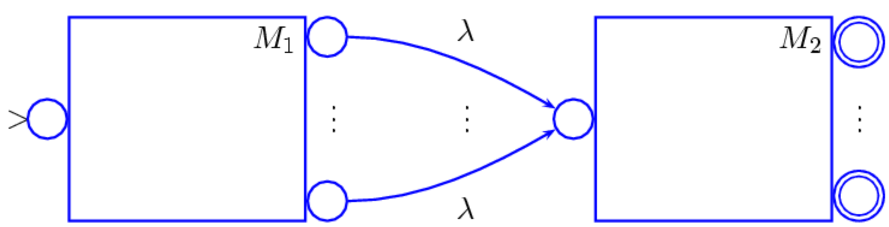


Los estados finales o de aceptación se dibujan a la derecha, pero cabe advertir que el estado inicial puede ser también un estado de aceptación. Obviando ese detalle, podemos ahora obtener AFN-λ que acepten los lenguajes $R \cup S$, RS y R^*.

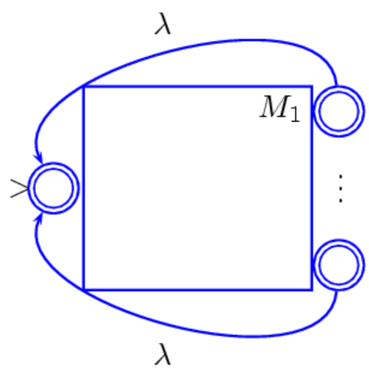
- Autómata que acepta $R \cup S$. Los autómatas M_1 y M_2 se conectan en paralelo y los estados finales del nuevo autómata son los estados finales de M_1 junto con los de M_2:



- Autómata que acepta RS. Los autómatas M_1 y M_2 se conectan en serie y los estados finales del nuevo autómata son únicamente los estados finales de M_2:



- Autómata que acepta R^*. Los estados finales del nuevo autómata son los estados finales de M_1 junto con el estado inicial.



Esto concluye la demostración de la parte I del teorema de Kleene. En la siguiente sección se presentan ejemplos concretos del procedimiento utilizado en la demostración. □