1.9. Concatenación de lenguajes

La **concatenación** de dos lenguajes A y B sobre Σ, notada $A \cdot B$ o simplemente AB se define como

$$AB = \{uv : u \in A, \ \ v \in B\}$$

En general $AB \neq BA$.

Ejemplo Si $\Sigma = \{a, b, c\}$, $A = \{a, ab, ac\}$, $B = \{b, b^2\}$, entonces

$$\begin{aligned} AB &= \{ab, ab^2, ab^2, ab^3, acb, acb^2\}. \\ BA &= \{ba, bab, bac, b^2a, b^2ab, b^2ac\} \end{aligned}$$

Ejemplo Si $\Sigma = \{a, b, c\}$, $A = \{ba, bc\}$, $B = \{b^n : n \geq 0\}$, entonces

$$\begin{aligned} AB &= \{bab^n : n \geq 0\} \cup \{bcb^n : n \geq 0\}. \\ BA &= \{b^n ba : n \geq 0\} \cup \{b^n bc : n \geq 0\} \\ &= \{b^{n+1}a : n \geq 0\} \cup \{b^{n+1}c : n \geq 0\} \\ &= \{b^n a : n \geq 1\} \cup \{b^n c : n \geq 1\}. \end{aligned}$$

Ejercicio Dé un ejemplo de un alfabeto Σ y dos lenguajes A, B sobre Σ tales que $AB = BA$

Propiedades de la concatenación de lenguajes. *Sean A, B, C lenguajes sobre Σ, es decir $A, B, C \subseteq \Sigma^*$. Entonces*

1. $A \cdot \varnothing = \varnothing \cdot A = \varnothing$.

2. $A \cdot \{\lambda\} = \{\lambda\} \cdot A = A$.

3. Propiedad Asociativa.

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

4. Distributividad de la concatenación con respecto a la unión.

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cup C) &= A \cdot B \cup A \cdot C. \\ (B \cup C) \cdot A &= B \cdot A \cup C \cdot A. \end{aligned}$$

5. Propiedad distributiva generalizada. Si $\{B_i\}_{i \in I}$ es una familia cualquiera de lenguajes sobre Σ, entonces

$$A \cdot \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cdot B_i)$$

$$\bigcup_{i \in I} B_i \cdot A = \bigcup_{i \in I} (B_i \cdot A).$$

Demostración:

1. $A \cdot \varnothing = \{uv : u \in A,\ v \in \varnothing\} = \varnothing$.

2. $A \cdot \{\lambda\} = \{uv : u \in A,\ v \in \{\lambda\}\} = \{u : u \in A\} = A$.

3. Se sigue de la asociatividad de la concatenación de palabras.

4. Caso particular de la propiedad general, demostrada a continuación.

5. Demostración de la igualdad $A \cdot \bigcup\limits_{i \in I} B_i = \bigcup\limits_{i \in I} (A \cdot B_i)$:

$$\begin{aligned} x \in A \cdot \textstyle\bigcup_{i\in I} B_i &\iff x = u \cdot v, \quad \text{con } u \in A \ \&\ v \in \textstyle\bigcup_{i\in I} B_i \\ &\iff x = u \cdot v, \quad \text{con } u \in A \ \&\ v \in B_j, \quad \text{para algún } j \in I \\ &\iff x \in A \cdot B_j, \quad \text{para algún } j \in I \\ &\iff x \in \textstyle\bigcup_{i\in I} (A \cdot B_i). \end{aligned}$$

La igualdad $\bigcup\limits_{i \in I} B_i \cdot A = \bigcup\limits_{i \in I} (B_i \cdot A)$ se demuestra de forma similar.

Observaciones:

- La propiedad asociativa permite escribir concatenaciones de tres o más lenguajes sin necesidad de usar paréntesis.

- En general, no se cumple que $A \cdot (B \cap C) = A \cdot B \cap A \cdot C$. Es decir, la concatenación no es distributiva con respecto a la intersección. Contraejemplo: $A = \{a, \lambda\}$, $B = \{\lambda\}$, $C = \{a\}$.

  Se tiene: $A \cdot (B \cap C) = \{a, \lambda\} \cdot \varnothing = \varnothing$. Por otro lado,

$$A \cdot B \cap A \cdot C = \{a, \lambda\} \cdot \{\lambda\} \cap \{a, \lambda\} \cdot \{a\} = \{a, \lambda\} \cap \{a^2, a\} = \{a\}.$$

Ejercicio Una de las dos contenencias siguientes es verdadera y la otra es falsa. Demostrar o refutar, según sea el caso:

1. $A \cdot (B \cap C) \subseteq A \cdot B \cap A \cdot C$.
2. $A \cdot B \cap A \cdot C \subseteq A \cdot (B \cap C)$.