3.5. Imagen inversa de un homomorfismo

Dado un homomorfismo $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ y un lenguaje $B \subseteq \Gamma^*$, la **imagen inversa de A por h** es

$$h^{-1}(B) := \{u \in \Sigma^* : h(u) \in B\}.$$

La regularidad es también preservada por imágenes inversas de homomorfismos, tal como lo afirma el siguiente teorema.

3.5.1 Teorema. *Sea $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ un homomorfismo y $B \subseteq \Gamma^*$ un lenguaje regular sobre Γ. La imagen inversa $h^{-1}(B)$ es un lenguaje regular sobre Σ.*

Demostración: Comenzando con un AFD $M = (\Gamma, Q, q_0, F, \delta)$ que acepte a B podemos construir un AFD $M' = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta')$ que acepte $h^{-1}(B)$. La función de transición δ' se define mediante $\delta'(q, a) = \delta(q, h(a))$ (aquí se usa la función extendida δ, según la definición 2.5.2. No es difícil demostrar por inducción sobre w que $\delta'(q_0, w) = \delta(q_0, h(w))$, para toda cadena $w \in \Sigma^*$. Como los estados de aceptación de M y M' coinciden, M' acepta a w si y sólo si M acepta a $h(w)$. Por lo tanto,

$$w \in L(M') \Longleftrightarrow h(w) \in L(M) = B \Longleftrightarrow w \in h^{-1}(B)$$

Esto quiere decir que $L(M') = h^{-1}(B)$. $\square$

Con la ayuda del teorema 3.5.1 y de las demás propiedades de clausura también podemos concluir que ciertos lenguajes no son regulares.

Ejemplo El lenguaje $L = \{0^n 1 0^n : n \geq 1\}$ no es regular ya que si lo fuera, también lo sería $h^{-1}(L)$ donde h es el homomorfismo $h(0) = h(1) = 0$, $h(2) = 1$. Pero

$$h^{-1}(L) = \Big\{\{0,1\}^n 2 \{0,1\}^n : n \geq 1\Big\}.$$

Entonces $h^{-1}(L) \cap 0^* 2 1^*$ sería regular; este último lenguaje es igual a $\{0^n 2 1^n : n \geq 1\}$. Finalmente, por medio del homomorfismo $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g(2) = \lambda$ se concluiría que $g\big(\{0^n 2 1^n : n \geq 1\}\big) = \{0^n 1^n : n \geq 1\}$ es regular, lo cual sabemos que no es cierto.

Ejercicios de la sección 3.5

Por medio de un razonamiento similar al del ejemplo de esta sección, demostrar que los siguientes lenguajes sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ no son regulares:

1. $L = \{ww : w \in \Sigma^*\}$. Ayuda: intersectar primero L con 0^*10^*1.
2. $L = \{ww^R : w \in \Sigma^*\}$. Ayuda: intersectar primero L con 0^*110^*.