

4.11. Forma Normal de Greibach (FNG)

Una GIC está en **Forma Normal de Greibach** (FNG) si

1. La variable inicial no es recursiva.
2. G no tiene variables inútiles.
3. G no tiene producciones λ (excepto posiblemente $S \rightarrow \lambda$).
4. Todas las producciones son de la forma: $A \rightarrow a$ (producciones simples) ó $A \rightarrow aB_1B_2 \dots B_k$, donde las B_i son variables.

Las derivaciones en una gramática que esté en FNG tienen dos características notables: en cada paso aparece un único terminal y, en segundo lugar, la derivación de una cadena de longitud n ($n \geq 1$) tiene exactamente n pasos.

Existe un procedimiento algorítmico para transformar una GIC dada en una gramática equivalente en FNG. Para presentar el procedimiento necesitamos algunos resultados preliminares.

4.11.1 Definición. Una variable se llama **recursiva a la izquierda** si tiene una producción de la forma:

$$A \rightarrow Aw, \quad w \in (V \cup \Sigma)^*.$$

La recursividad a izquierda se puede eliminar, como se muestra en el siguiente teorema.

4.11.2 Teorema (Eliminación de la recursividad a la izquierda). *Las producciones de una variable A cualquiera se pueden dividir en dos clases:*

$$\begin{cases} A \rightarrow A\alpha_1 \mid A\alpha_2 \mid \dots \mid A\alpha_n \\ A \rightarrow \beta_1 \mid \beta_2 \mid \dots \mid \beta_m \end{cases}$$

donde $\alpha_i, \beta_i \in (V \cup \Sigma)^*$ y el primer símbolo de β_i es diferente de A . Sin alterar el lenguaje generado, las anteriores producciones se pueden simular, reemplazándolas por las siguientes:

$$\begin{cases} A \rightarrow \beta_1 \mid \beta_2 \mid \dots \mid \beta_m \mid \beta_1 Z \mid \beta_2 Z \mid \dots \mid \beta_m Z \\ Z \rightarrow \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \dots \mid \alpha_n \mid \alpha_1 Z \mid \alpha_2 Z \mid \dots \mid \alpha_n Z \end{cases}$$

donde Z es una variable completamente nueva.

Demostración: Se puede observar que, tanto con las producciones originales como las nuevas, A genera el lenguaje

$$\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\} \cdot \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}^* \quad \square$$

4.11.3 Lema. *En una GIC cualquiera, una producción $A \rightarrow uBv$ se puede reemplazar (simular) por*

$$A \rightarrow uw_1v \mid uw_2v \mid \dots \mid uw_nv$$

siendo $B \rightarrow w_1 \mid w_2 \mid \dots \mid w_n$ todas las producciones de B .

Demostración: Inmediato. \square

4.11.4 Teorema (Procedimiento de conversión a FNG). *Toda GIC G es equivalente a una gramática en Forma Normal de Greibach.*

Demostración: Suponemos que la gramática dada está en FNC. Esto simplifica el procedimiento, aunque éste es válido (con modificaciones menores) para una gramática arbitraria si se eliminan primero las variables inútiles, las producciones λ y las producciones unitarias. La conversión a FNG se realiza ejecutando los siguientes pasos:

1. Enumerar las variables en un orden arbitrario pero fijo durante el procedimiento. S debe ser la variable con orden 1.
2. Para cada variable A de la gramática original, siguiendo el orden elegido, modificar sus producciones de tal manera que el primer símbolo del cuerpo de cada producción (primer símbolo a la derecha de la flecha) sea un terminal o una variable con orden mayor que el de A . Para lograrlo se usa el teorema de eliminación de la recursividad a la izquierda, [Teorema 4.11.2](#), y el [Lema 4.11.3](#), todas las veces que sea necesario.
3. Utilizar el [Lema 4.11.3](#) para modificar las producciones de las variables *originales* de tal manera que el primer símbolo del cuerpo de cada producción sea un terminal. Esto se hace siguiendo el orden inverso de enumeración de las variables: última, penúltima, etc.
4. Utilizar de nuevo el [Lema 4.11.3](#), para modificar las producciones de las variables *nuevas* de tal manera que el primer símbolo del cuerpo de cada producción sea un terminal. \square

Ejemplo Encontrar una gramática en FNG equivalente a la siguiente gramática (que está en FNC):

$$G: \begin{cases} S \rightarrow AA \mid a \\ A \rightarrow AA \mid b \end{cases}$$

Paso 1: Aquí solamente hay un orden posible para variables: S, A .

Paso 2: En este paso sólo hay que eliminar la recursividad a izquierda de la variable A . Al hacerlo se obtiene la gramática:

$$\begin{cases} S \rightarrow AA \mid a \\ A \rightarrow b \mid bZ \\ Z \rightarrow A \mid AZ \end{cases}$$

Paso 3:

$$\begin{cases} S \rightarrow bA \mid bZA \mid a \\ A \rightarrow b \mid bZ \\ Z \rightarrow A \mid AZ \end{cases}$$

Paso 4:

$$\begin{cases} S \rightarrow bA \mid bZA \mid a \\ A \rightarrow b \mid bZ \\ Z \rightarrow b \mid bZ \mid bZZ \end{cases}$$

Ejemplo Encontrar una gramática en FNG equivalente a la siguiente gramática (que está en FNC):

$$\begin{cases} S \rightarrow AB \mid BC \\ A \rightarrow AB \mid a \\ B \rightarrow AA \mid CB \mid a \\ C \rightarrow a \mid b \end{cases}$$

Paso 1: Orden de las variables: S, B, A, C . Este orden es muy adecuado porque el cuerpo de las producciones de B comienza con A o C , que son variables de orden mayor.

$$\begin{cases} S \rightarrow AB \mid BC \\ B \rightarrow AA \mid CB \mid a \\ A \rightarrow AB \mid a \\ C \rightarrow a \mid b \end{cases}$$

Paso 2:

$$\begin{cases} S \rightarrow AB \mid BC \\ B \rightarrow AA \mid CB \mid a \\ A \rightarrow a \mid aZ \\ C \rightarrow a \mid b \\ Z \rightarrow B \mid BZ \end{cases}$$

Paso 3:

$$\begin{cases} S \rightarrow aB \mid aZB \mid aAC \mid aZAC \mid aBC \mid bBC \mid aC \\ B \rightarrow aA \mid aZA \mid aB \mid bB \mid a \\ A \rightarrow a \mid aZ \\ C \rightarrow a \mid b \\ Z \rightarrow B \mid BZ \end{cases}$$

Paso 4:

$$\begin{cases} S \rightarrow aB \mid aZB \mid aAC \mid aZAC \mid aBC \mid bBC \mid aC \\ B \rightarrow aA \mid aZA \mid aB \mid bB \mid a \\ A \rightarrow a \mid aZ \\ C \rightarrow a \mid b \\ Z \rightarrow aA \mid aZA \mid aB \mid bB \mid a \mid aAZ \mid aZAZ \mid aBZ \mid bBZ \mid aZ \end{cases}$$

El siguiente ejemplo ilustra que el procedimiento de conversión a la forma FNG puede dar lugar a docenas de producciones, incluso a partir de una gramática relativamente sencilla.

Ejemplo Encontrar una gramática en FNG equivalente a la siguiente gramática:

$$\begin{cases} S \rightarrow AB \\ A \rightarrow AB \mid CB \mid a \\ B \rightarrow AB \mid b \\ C \rightarrow AC \mid c \end{cases}$$

Paso 1: Orden de las variables: S, A, B, C .

Paso 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow AB \\ A \rightarrow CB \mid a \mid CBZ_1 \mid aZ_1 \\ B \rightarrow CBB \mid aB \mid CBZ_1B \mid aZ_1B \mid b \\ C \rightarrow CBC \mid aC \mid CBZ_1C \mid aZ_1C \mid c \\ Z_1 \rightarrow B \mid BZ_1 \end{array} \right.$$

Prosiguiendo con el paso 2, se elimina la recursividad a izquierda de la variable C:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow AB \\ A \rightarrow CB \mid a \mid CBZ_1 \mid aZ_1 \\ B \rightarrow CBB \mid aB \mid CBZ_1B \mid aZ_1B \mid b \\ C \rightarrow aC \mid aZ_1C \mid c \mid aCZ_2 \mid aZ_1CZ_2 \mid cZ_2 \\ Z_1 \rightarrow B \mid BZ_1 \\ Z_2 \rightarrow BC \mid BZ_1C \mid BCZ_2 \mid BZ_1CZ_2 \end{array} \right.$$

Paso 3:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 14 \text{ producciones} \\ A \rightarrow a \mid aZ_1 \mid 6 \text{ producciones} \mid 6 \text{ producciones} \\ B \rightarrow aB \mid aZ_1B \mid b \mid 6 \text{ producciones} \mid 6 \text{ producciones} \\ C \rightarrow aC \mid aZ_1C \mid c \mid aCZ_2 \mid aZ_1CZ_2 \mid cZ_2 \\ Z_1 \rightarrow B \mid BZ_1 \\ Z_2 \rightarrow BC \mid BZ_1C \mid BCZ_2 \mid BZ_1CZ_2 \end{array} \right.$$

Paso 4: El número de producciones de la nueva gramática se incrementa drásticamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 14 \text{ producciones} \\ A \rightarrow a \mid aZ_1 \mid 6 \text{ producciones} \mid 6 \text{ producciones} \\ B \rightarrow aB \mid aZ_1B \mid b \mid 6 \text{ producciones} \mid 6 \text{ producciones} \\ C \rightarrow aC \mid aZ_1C \mid c \mid aCZ_2 \mid aZ_1CZ_2 \mid cZ_2 \\ Z_1 \rightarrow 15 \text{ producciones} \mid 15 \text{ producciones} \\ Z_2 \rightarrow 15 \text{ producciones} \mid 15 \text{ producciones} \mid 15 \text{ producciones} \mid \\ \quad 15 \text{ producciones} \end{array} \right.$$

La gramática original tenía 8 producciones; la nueva gramática en FNG tiene un total de 139 producciones.

Ejercicios de la sección 4.11

1. Encontrar una gramática en FNG equivalente a la siguiente GIC:

$$\begin{cases} S \rightarrow CA \mid AC \mid a \\ A \rightarrow BA \mid AB \mid b \\ B \rightarrow AA \mid a \mid b \\ C \rightarrow AC \mid CC \mid a \end{cases}$$

2. Encontrar una gramática en FNG equivalente a la siguiente GIC:

$$\begin{cases} S \rightarrow BB \mid BC \mid b \\ A \rightarrow AC \mid CA \mid a \\ B \rightarrow BB \mid a \\ C \rightarrow BC \mid CA \mid a \end{cases}$$

3. Encontrar una gramática en FNG equivalente a la siguiente GIC:

$$\begin{cases} S \rightarrow SC \mid AA \mid a \\ A \rightarrow CA \mid AB \mid a \\ B \rightarrow AC \mid b \\ C \rightarrow CA \mid AS \mid b \end{cases}$$

Nota: hay que eliminar primero la recursividad de la variable S .