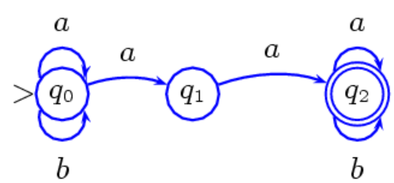
2.12. Ejemplos de la parte II del Teorema de Kleene

A continuación ilustraremos el procedimiento de la sección 2.11 para encontrar $L(M)$ a partir de un AFN $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \Delta)$ dado.

Ejemplo Considérese el siguiente AFN M:



Por simple inspección sabemos que $L(M) = (a \cup b)^* a^2 (a \cup b)^*$, pero utilizaremos el método descrito para encontrar explícitamente $L(M)$.

El sistema de ecuaciones asociado con el autómata M es:

$$\begin{cases} (1) \quad A_0 = aA_0 \cup bA_0 \cup aA_1 \\ (2) \quad A_1 = aA_2 \\ (3) \quad A_2 = aA_2 \cup bA_2 \cup \lambda. \end{cases}$$

La ecuación (3) se puede escribir como

(4) $\quad A_2 = (a \cup b)A_2 \cup \lambda.$

Aplicando el Lema de Arden en (4):

(5) $\quad A_2 = (a \cup b)^* \lambda = (a \cup b)^*.$

Reemplazando (5) en (2):

(6) $\quad A_1 = a(a \cup b)^*.$

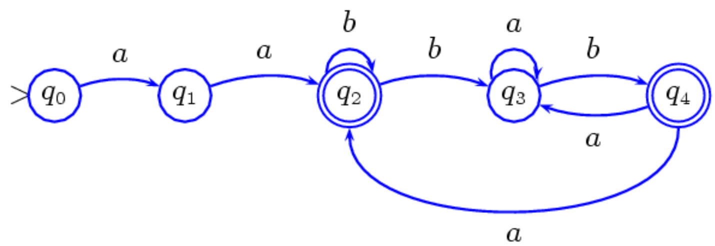
Reemplazando (6) en (1):

(7) $\quad A_0 = (a \cup b)A_0 \cup a^2(a \cup b)^*.$

Aplicando el Lema de Arden en (7) concluimos:

$$\boxed{A_0 = (a \cup b)^* a^2 (a \cup b)^*}$$

Ejemplo Encontrar una expresión regular para el lenguaje aceptado por el siguiente AFN M:



El sistema de ecuaciones asociado con el autómata M es:

$$\begin{cases} (1) \quad A_0 = aA_1 \\ (2) \quad A_1 = aA_2 \\ (3) \quad A_2 = bA_2 \cup bA_3 \cup \lambda \\ (4) \quad A_3 = aA_3 \cup bA_4 \\ (5) \quad A_4 = aA_2 \cup aA_3 \cup \lambda \end{cases}$$

Reemplazando (5) en (4):

(6) $\quad A_3 = aA_3 \cup baA_2 \cup baA_3 \cup b = (a \cup ba)A_3 \cup baA_2 \cup b.$

Aplicando el Lema de Arden en (6):

(7) $\quad A_3 = (a \cup ba)^*(baA_2 \cup b) = (a \cup ba)^*baA_2 \cup (a \cup ba)^*b.$

Reemplazando (7) en (3):

(8) $\quad A_2 = bA_2 \cup b(a \cup ba)^*baA_2 \cup b(a \cup ba)^*b \cup \lambda.$

El sistema original de cinco ecuaciones y cinco incógnitas se reduce al sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas formado por (1), (2) y (8).

La ecuación (8) se puede escribir como

(9) $\quad A_2 = \big[b \cup b(a \cup ba)^*ba\big]A_2 \cup b(a \cup ba)^* \cup \lambda.$

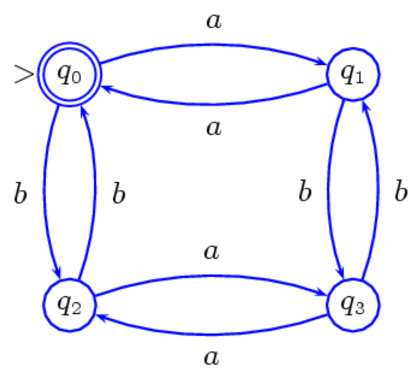
Aplicando el Lema de Arden en (9):

(10) $\quad A_2 \;=\; \big[b \cup b(a \cup ba)^*ba\big]^*\big[b(a \cup ba)^*b \cup \lambda\big].$

Si se sustituye (10) en (2) y luego el valor de A_1 obtenido se sustituye en (1), se obtiene finalmente:

$$\boxed{A_0 \;=\; a^2\big[b \cup b(a \cup ba)^*ba\big]^*\big[b(a \cup ba)^*b \cup \lambda\big]}$$

Ejemplo Encontrar una expresión regular para el lenguaje L de todas las cadenas sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que tienen un número par de $a$es y un número par de $b$es. El siguiente autómata acepta el lenguaje L:



Este autómata da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (1) \quad A_0 = aA_1 \cup bA_2 \cup \lambda \\ (2) \quad A_1 = aA_0 \cup bA_3 \\ (3) \quad A_2 = aA_3 \cup bA_0 \\ (4) \quad A_3 = aA_2 \cup bA_1 \end{cases}$$

Reemplazando (4) en (3):

$$(5) \qquad A_2 = a^2A_2 \cup abA_1 \cup bA_0.$$

Reemplazando (4) en (2):

$$(6) \qquad A_1 = aA_0 \cup baA_2 \cup b^2A_1.$$

El sistema original de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas se reduce a un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, a saber:

$$\begin{cases} (1) \quad A_0 = aA_1 \cup bA_2 \cup \lambda \\ (6) \quad A_1 = aA_0 \cup baA_2 \cup b^2A_1 \\ (5) \quad A_2 = a^2A_2 \cup abA_1 \cup bA_0 \end{cases}$$

Aplicando el Lema de Arden en (5):

$$(7) \qquad A_2 = (a^2)^*(abA_1 \cup bA_0) = (a^2)^*abA_1 \cup (a^2)^*bA_0.$$

Reemplazando (7) en (6):

$$A_1 \;=\; aA_0 \cup ba(a^2)^*abA_1 \cup ba(a^2)^*bA_0 \cup b^2A_1. \tag{8}$$

Reemplazando (7) en (1):

$$A_0 \;=\; aA_1 \cup b(a^2)^*abA_1 \cup b(a^2)^*bA_0 \cup \lambda. \tag{9}$$

El sistema se reduce ahora a dos ecuaciones:

$$\begin{cases} (9) \quad A_0 & = \quad aA_1 \cup b(a^2)^*abA_1 \cup b(a^2)^*bA_0 \cup \lambda \\ (8) \quad A_1 & = \quad aA_0 \cup ba(a^2)^*abA_1 \cup ba(a^2)^*bA_0 \cup b^2A_1 \\ & = \quad \big(ba(a^2)^*ab \cup b^2\big)A_1 \cup aA_0 \cup ba(a^2)^*bA_0. \end{cases}$$

Aplicando el Lema de Arden en (8):

$$\begin{aligned} A_1 &= \big(ba(a^2)^*ab \cup b^2\big)^*\big(aA_0 \cup ba(a^2)^*bA_0\big) \\ &= \big(ba(a^2)^*ab \cup b^2\big)^* aA_0 \cup \big(ba(a^2)ab \cup b^2\big)^* ba(a^2)^*bA_0. \end{aligned} \tag{10}$$

Haciendo $R = \big(ba(a^2)^*ab \cup b^2\big)^*$, (10) se puede escribir como

$$A_1 \;=\; RaA_0 \cup Rba(a^2)^*bA_0. \tag{11}$$

Aplicando el Lema de Arden en (9):

$$\begin{aligned} A_0 &= \big(b(a^2)^*b\big)^*\big(aA_1 \cup b(a^2)^*abA_1 \cup \lambda\big) \\ &= \big(b(a^2)^*b\big)^* aA_1 \cup \big(b(a^2)^*b\big)^* b(a^2)^*abA_1 \cup \big(b(a^2)^*b\big)^*. \end{aligned} \tag{12}$$

Haciendo $S = \big(b(a^2)^*b\big)^*$, (12) se puede escribir como:

$$A_0 \;=\; SaA_1 \cup Sb(a^2)^*abA_1 \cup S. \tag{13}$$

Al sustituir (11) en (13), el sistema original se reduce a una sola ecuación:

$$A_0 = Sa\big[RaA_0 \cup Rba(a^2)^*bA_0\big] \cup Sb(a^2)^*ab\big[RaA_0 \cup Rba(a^2)^*bA_0\big] \cup S. \tag{14}$$

Agrupando los términos en los que aparece A_0 y factorizando, se obtiene

$$A_0 = \big[SaRa \cup SaRba(a^2)^*b \cup Sb(a^2)^abRa \cup Sb(a^2)^*abRba(a^2)^*b\big]A_0 \cup S. \tag{15}$$

Aplicando Lema de Arden en (15):

$$A_0 = \big[SaRa \cup SaRba(a^2)^*b \cup Sb(a^2)^*abRa \cup Sb(a^2)^*abRba(a^2)^*b\big]^* S. \tag{16}$$

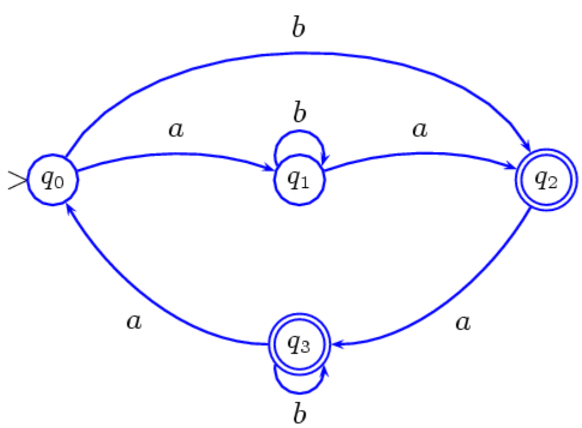
Si sustituimos R y S en (16) obtenemos una expresión regular para L.

Ejercicios Utilizando el lema de Arden, encontrar expresiones regulares para los siguientes lenguajes sobre $\Sigma = \{a, b\}$:

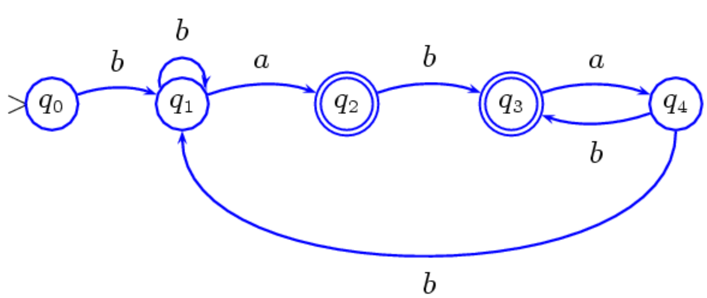
1. El lenguaje L de todas las cadenas que tienen un número par de $a$es y un número impar de $b$es.
2. El lenguaje L de todas las cadenas que tienen un número par de $a$es o un número impar de $b$es.

Ejercicios Utilizando el lema de Arden, encontrar expresiones regulares para los lenguajes aceptados por los siguientes AFN:

1.



2.



3.