3.2. Propiedades de clausura

Las propiedades de clausura afirman que a partir de lenguajes regulares se pueden obtener otros lenguajes regulares por medio de ciertas operaciones entre lenguajes. Es decir, la regularidad es preservada por ciertas operaciones entre lenguajes; en tales casos se dice que *los lenguajes regulares son cerrados bajo las operaciones.*

El siguiente teorema establece que la colección $\mathcal{R} \subseteq \wp(\Sigma^*)$ de los lenguajes regulares sobre un alfabeto Σ es cerrada bajo todas las operaciones booleanas.

3.2.1 Teorema. *Si L, L_1 y L_2 son lenguajes regulares sobre un alfabeto Σ, también lo son:*

(1)	$L_1 \cup L_2$	(unión)
(2)	$L_1 L_2$	(concatenación)
(3)	L^*	(estrella de Kleene)
(4)	L^+	(clausura positiva)
(5)	$\overline{L} = \Sigma^* - L$	(complemento)
(6)	$L_1 \cap L_2$	(intersección)
(7)	$L_1 - L_2$	(diferencia)
(8)	$L_1 \triangleleft L_2$	(diferencia simétrica)

Demostración:

(1), (2) y (3) se siguen de la definición de los lenguajes regulares.

(4) Por (2), (3) y $L^+ = L^* L$.

(5) Por el Teorema de Kleene y por los teoremas de equivalencia de los modelos AFD, AFN y AFN-λ, existe un AFD $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ tal que $L(M) = L$. Para construir un AFD que acepte el complemento de L basta intercambiar los estados finales con los no finales. Si M' es el autómata $(\Sigma, Q, q_0, Q - F, \delta)$, entonces $L(M') = \overline{L}$.

(6) Se sigue de (1) y (5) teniendo en cuenta que $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.

(7) Se sigue de (5) y (6) teniendo en cuenta que $L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$.

(8) Puesto que

$$L_1 \triangleleft L_2 = (L_1 \cup L_2) - (L_1 \cap L_2) = (L_1 - L_2) \cup (L_2 - L_1)$$

el resultado se sigue de (1), (6), (7). □

Recuérdese que un **álgebra booleana de conjuntos** es una familia $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$ cerrada bajo las operaciones de unión, intersección y complemento, tal que $\varnothing \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{A}$.

3.2.2 Corolario. *La colección $\mathcal{R} \subseteq \wp(\Sigma^*)$ de todos los lenguajes regulares sobre un alfabeto Σ es un álgebra booleana de conjuntos.*

<u>*Demostración*</u>: Se sigue del teorema 3.2.1 y del hecho de que $\varnothing$ y Σ^* son lenguajes regulares sobre Σ. $\square$

- ✎ Hemos visto que un lenguaje finito es regular y que la unión finita de lenguajes regulares es regular. Pero una unión infinita de lenguajes regulares no necesariamente es regular; considérese, por ejemplo,

$$L = \{a^n b^n : n \geq 1\} = \bigcup_{i \geq 1} \{a^i b^i\}.$$

  Cada conjunto $\{a^i b^i\}$ es regular (porque posee sólo una cadena) pero L no lo es.

- ✎ Un sublenguaje (subconjunto) de un lenguaje regular no es necesariamente regular, es decir, la familia de los lenguajes regulares no es cerrada para subconjuntos. Dicho de otra forma, un lenguaje regular puede contener sublenguajes no-regulares. Por ejemplo, $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$ es un sublenguaje del lenguaje regular $a^* b^*$, pero L mismo no es regular.

Las propiedades de clausura permiten concluir, razonando por contradicción, que ciertos lenguajes no son regulares. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos en los que se usa el hecho de que los lenguajes $L = \{a^i b^i : i \geq 0\}$ y $L = \{a^i b^i : i \geq 1\}$ no son regulares.

Ejemplo $L = \{a^i b^j : i, j \geq 0,\ i \neq j\}$ no es regular. Si lo fuera, $a^* b^* - L$ también lo sería, pero $a^* b^* - L = \{a^i b^i : i \geq 0\}$.

Ejemplo El lenguaje $L = \{w b^n : w \in \Sigma^*,\ |w| = n,\ n \geq 1\}$ sobre $\Sigma = \{a, b\}$ no es regular. Si L fuera regular, también lo sería $L \cap a^* b^*$ pero $L \cap a^* b^* = \{a^n b^n : n \geq 1\}$.

Ejercicios de la sección 3.2

1. Demostrar que $a^* b^*$ es la unión de dos lenguajes disyuntos no-regulares.

2. Sea L un lenguaje no-regular y N un subconjunto finito de L. Demostrar que $L - N$ tampoco es regular.

3. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

   (i) Un lenguaje no-regular debe ser infinito.

   (ii) Si el lenguaje $L_1 \cup L_2$ es regular, también lo son L_1 y L_2.

   (iii) Si los lenguajes L_1 y L_2 no son regulares, el lenguaje $L_1 \cap L_2$ tampoco puede ser regular.

   (iv) Si el lenguaje L^* es regular, también lo es L.

   (v) Si L es regular y N es un subconjunto finito de L, entonces $L - N$ es regular.

   (vi) Un lenguaje regular L es infinito si y sólo si en cualquier expresión regular de L aparece por lo menos una $*$.

4. Utilizar las propiedades de clausura para concluir que los siguientes lenguajes no son regulares:

   (i) $L = \{1^i 0 1^j 0 : i, j \geq 1, \ i \neq j\}$, sobre $\Sigma = \{0, 1\}$. Ayuda: utilizar el ejercicio 1(v) de la sección 3.1.

   (ii) $L = \{uvu^R : u, v \in \{a, b\}^+\}$, sobre $\Sigma = \{a, b\}$. Ayuda: utilizar el ejercicio 1(ii) de la sección 3.1.

   (iii) $L = \{u : |u| \text{ es un cuadrado perfecto}\}$, sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$. Ayuda: utilizar el último ejemplo de la sección 3.1.