

1.8. Operaciones entre lenguajes

Puesto que los lenguajes sobre Σ son subconjuntos de Σ^* , las operaciones usuales entre conjuntos son también operaciones válidas entre lenguajes. Así, si A y B son lenguajes sobre Σ (es decir $A, B \subseteq \Sigma^*$), entonces los siguientes también son lenguajes sobre Σ :

$A \cup B$	Unión
$A \cap B$	Intersección
$A - B$	Diferencia
$\overline{A} = \Sigma^* - A$	Complemento

Estas operaciones entre lenguajes se llaman **operaciones conjuntistas** para distinguirlas de las **operaciones lingüísticas** (concatenación, potencia, inverso, clausura) que son extensiones a los lenguajes de las ya mencionadas operaciones entre palabras.

1.9. Concatenación de lenguajes

La **concatenación** de dos lenguajes A y B sobre Σ , notada $A \cdot B$ o simplemente AB se define como

$$AB = \{uv : u \in A, v \in B\}$$

En general $AB \neq BA$.

Ejemplo Si $\Sigma = \{a, b, c\}$, $A = \{a, ab, ac\}$, $B = \{b, b^2\}$, entonces

$$\begin{aligned} AB &= \{ab, ab^2, ab^2, ab^3, acb, acb^2\}. \\ BA &= \{ba, bab, bac, b^2a, b^2ab, b^2ac\} \end{aligned}$$

Ejemplo Si $\Sigma = \{a, b, c\}$, $A = \{ba, bc\}$, $B = \{b^n : n \geq 0\}$, entonces

$$\begin{aligned} AB &= \{bab^n : n \geq 0\} \cup \{bcb^n : n \geq 0\}. \\ BA &= \{b^nba : n \geq 0\} \cup \{b^nbc : n \geq 0\} \\ &= \{b^{n+1}a : n \geq 0\} \cup \{b^{n+1}c : n \geq 0\} \\ &= \{b^na : n \geq 1\} \cup \{b^nc : n \geq 1\}. \end{aligned}$$

Ejercicio Dé un ejemplo de un alfabeto Σ y dos lenguajes A, B sobre Σ tales que $AB = BA$

Propiedades de la concatenación de lenguajes. Sean A, B, C lenguajes sobre Σ , es decir $A, B, C \subseteq \Sigma^*$. Entonces

1. $A \cdot \emptyset = \emptyset \cdot A = \emptyset$.
2. $A \cdot \{\lambda\} = \{\lambda\} \cdot A = A$.
3. Propiedad Asociativa.

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

4. Distributividad de la concatenación con respecto a la unión.

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cup C) &= A \cdot B \cup A \cdot C. \\ (B \cup C) \cdot A &= B \cdot A \cup C \cdot A. \end{aligned}$$

5. Propiedad distributiva generalizada. Si $\{B_i\}_{i \in I}$ es una familia cualquiera de lenguajes sobre Σ , entonces

$$\begin{aligned} A \cdot \bigcup_{i \in I} B_i &= \bigcup_{i \in I} (A \cdot B_i) \\ \bigcup_{i \in I} B_i \cdot A &= \bigcup_{i \in I} (B_i \cdot A). \end{aligned}$$

Demostración:

1. $A \cdot \emptyset = \{uv : u \in A, v \in \emptyset\} = \emptyset$.
2. $A \cdot \{\lambda\} = \{uv : u \in A, v \in \{\lambda\}\} = \{u : u \in A\} = A$.
3. Se sigue de la asociatividad de la concatenación de palabras.
4. Caso particular de la propiedad general, demostrada a continuación.
5. Demostración de la igualdad $A \cdot \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cdot B_i)$:

$$\begin{aligned} x \in A \cdot \bigcup_{i \in I} B_i &\iff x = u \cdot v, \quad \text{con } u \in A \text{ \& } v \in \bigcup_{i \in I} B_i \\ &\iff x = u \cdot v, \quad \text{con } u \in A \text{ \& } v \in B_j, \quad \text{para algún } j \in I \\ &\iff x \in A \cdot B_j, \quad \text{para algún } j \in I \\ &\iff x \in \bigcup_{i \in I} (A \cdot B_i). \end{aligned}$$

La igualdad $\bigcup_{i \in I} B_i \cdot A = \bigcup_{i \in I} (B_i \cdot A)$ se demuestra de forma similar.

Observaciones:

- La propiedad asociativa permite escribir concatenaciones de tres o más lenguajes sin necesidad de usar paréntesis.
- En general, no se cumple que $A \cdot (B \cap C) = A \cdot B \cap A \cdot C$. Es decir, la concatenación no es distributiva con respecto a la intersección. Contraejemplo: $A = \{a, \lambda\}$, $B = \{\lambda\}$, $C = \{a\}$.

Se tiene: $A \cdot (B \cap C) = \{a, \lambda\} \cdot \emptyset = \emptyset$. Por otro lado,

$$A \cdot B \cap A \cdot C = \{a, \lambda\} \cdot \{\lambda\} \cap \{a, \lambda\} \cdot \{a\} = \{a, \lambda\} \cap \{a^2, a\} = \{a\}.$$

Ejercicio

Una de las dos contenenencias siguientes es verdadera y la otra es falsa. Demostrar o refutar, según sea el caso:

1. $A \cdot (B \cap C) \subseteq A \cdot B \cap A \cdot C$.
2. $A \cdot B \cap A \cdot C \subseteq A \cdot (B \cap C)$.

1.10. Potencias de un lenguaje

Dado un lenguaje A sobre Σ ($A \subseteq \Sigma^*$), y $n \in \mathbb{N}$, se define A^n en la siguiente forma

$$\begin{aligned} A^0 &= \{\lambda\}, \\ A^n &= \underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ veces}} \end{aligned}$$

Esta definición generaliza a lenguajes la definición de potenciación de palabras.

1.11. La clausura de Kleene de un lenguaje

La **clausura de Kleene** o **estrella de Kleene** de un lenguaje A , $A \subseteq \Sigma^*$, es la unión de todas las potencias de A y se denota por A^* .

$$A^* = \bigcup_{i \geq 0} A^i = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \cdots \cup A^n \cdots \quad (\text{Descripción 1})$$

A^* se puede describir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A^* &= \text{conjunto de } \textit{todas} \text{ las concatenaciones} \\ &\quad \text{de palabras de } A, \text{ incluyendo } \lambda \\ &= \{u_1 \cdots u_n : u_i \in A, n \geq 0\} \end{aligned} \quad (\text{Descripción 2})$$

De manera similar se define la **clausura positiva** de un lenguaje A , $A \subseteq \Sigma^*$, la cual se denota por A^+ .

$$A^+ = \bigcup_{i \geq 1} A^i = A^1 \cup A^2 \cup \dots \cup A^n \dots$$

A^+ se puede describir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A^+ &= \text{conjunto de todas las concatenaciones de palabras de } A, \\ &= \{u_1 \cdots u_n : u_i \in A, \quad n \geq 1\} \end{aligned}$$

Obsérvese que $A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$ y que $A^* = A^+$ si y solamente si $\lambda \in A$.

Propiedades. Sea A un lenguaje sobre Σ , ($A \subseteq \Sigma^*$).

1. $A^+ = A^* \cdot A = A \cdot A^*$
2. $A^* \cdot A^* = A^*$
3. $(A^*)^n = A^*$, para todo $n \geq 1$.
4. $(A^*)^* = A^*$.
5. $A^+ \cdot A^+ \subseteq A^+$.
6. $(A^*)^+ = A^*$.
7. $(A^+)^* = A^*$.
8. $(A^+)^+ = A^+$.

Demostración:

1.

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= A \cdot (A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots) \\ &= A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots \\ &= A^+. \end{aligned}$$

Similarmente se demuestra que $A^* \cdot A = A^+$.

2. Si $x \in A^* \cdot A^*$, entonces $x = u \cdot v$, con $u \in A^*$, $v \in A^*$. Entonces, $x = u \cdot v$, con $u = u_1 u_2 \cdots u_n$, $u_i \in A$, $n \geq 0$ y $v = v_1 v_2 \cdots v_m$, $v_i \in A$, $m \geq 0$.

De donde

$$x = u \cdot v = u_1 \cdot u_2 \cdots u_n \cdot v_1 \cdot v_2 \cdots v_m.$$

con $u_i \in A$, $v_i \in A$, $n \geq 0$. Por lo tanto, x es una concatenación de $n + m$ palabras de A . Así que $x \in A^*$.

Recíprocamente, si $x \in A^*$, entonces $x = x \cdot \lambda \in A^* \cdot A^*$.

Esto prueba la igualdad de los conjuntos $A^* \cdot A^*$ y A^* .

3. Se sigue de la propiedad anterior.

4.

$$\begin{aligned} (A^*)^* &= (A^*)^0 \cup (A^*)^1 \cup (A^*)^2 \cup \dots \\ &= \{\lambda\} \cup A^* \cup A^* \cup A^* \cup \dots \\ &= A^*. \end{aligned}$$

5. La demostración de esta propiedad es similar a la de la propiedad 1, pero con la restricción $m, n \geq 1$.

En general, no se tiene la igualdad $A^+ \cdot A^+ = A^+$; más adelante se mostrará un contraejemplo.

6.

$$\begin{aligned} (A^*)^+ &= (A^*)^1 \cup (A^*)^2 \cup (A^*)^3 \cup \dots \\ &= A^* \cup A^* \cup A^* \cup \dots \\ &= A^*. \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} (A^+)^* &= (A^+)^0 \cup (A^+)^1 \cup (A^+)^2 \cup \dots \\ &= \{\lambda\} \cup A^+ \cup A^+ A^+ \cup \dots \\ &= A^* \cup (\text{conjuntos contenidos en } A^+) \\ &= A^* \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} (A^+)^+ &= (A^+)^1 \cup (A^+)^2 \cup (A^+)^3 \cup \dots, \\ &= A^+ \cup (\text{conjuntos contenidos en } A^+) \\ &= A^+ \end{aligned}$$

Contraejemplo de $\boxed{A^+ \cdot A^+ = A^+}$.

Sea $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{a\}$. Se tiene

$$A^+ = A^1 \cup A^2 \cup \dots = \{a\} \cup \{aa\} \cup \{aaa\} \cup \dots = \{a^n : n \geq 1\}$$

Por otro lado,

$$A^+ \cdot A^+ = \{a, a^2, a^3, \dots\} \cdot \{a, a^2, a^3, \dots\} = \{a^2, a^3, a^4, \dots\} = \{a^n : n \geq 2\}.$$

Observación: Según las definiciones dadas, Σ^* tiene dos significados:

Σ^* = conjunto de las palabras sobre el alfabeto Σ .

Σ^* = conjunto de todas las concatenaciones de palabras de Σ .

No hay conflicto de notaciones porque las dos definiciones anteriores de Σ^* dan lugar al mismo conjunto.

Ejercicio Sean $A, B \subseteq \Sigma^*$. Demostrar que

$$(A \cup B)^* = (A^* B^*)^* \quad (1.1)$$

Ayuda: tener en cuenta tanto la [descripción 1](#) como la [descripción 2](#) presentadas arriba.

1.12. Inverso de un lenguaje

Dado A un lenguaje sobre Σ , se define A^{-1} de la siguiente forma:

$$A^{-1} = \{u^{-1} : u \in A\}.$$

Propiedades. Sean A y B lenguajes sobre Σ (es decir, $A, B \subseteq \Sigma^*$).

1. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
2. $(A \cup B)^{-1} = A^{-1} \cup B^{-1}$.
3. $(A \cap B)^{-1} = A^{-1} \cap B^{-1}$.
4. $(A^{-1})^{-1} = A$.
5. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
6. $(A^+)^{-1} = (A^{-1})^+$.

Demostración:

1.

$$\begin{aligned}
 x \in (A \cdot B)^{-1} &\iff x = u^{-1}, \text{ donde } u \in A \cdot B. \\
 &\iff x = u^{-1}, \text{ donde } u = vw, v \in A, w \in B. \\
 &\iff x = (vw)^{-1}, \text{ donde } v \in A, w \in B. \\
 &\iff x = w^{-1}v^{-1}, \text{ donde } v \in A, w \in B. \\
 &\iff x \in B^{-1} \cdot A^{-1}
 \end{aligned}$$

2. **Ejercicio**3. **Ejercicio**4. **Ejercicio**

5.

$$\begin{aligned}
x \in (A^*)^{-1} &\iff x = u^{-1}, \text{ donde } u \in A^*. \\
&\iff x = (u_1 \cdot u_2 \cdots u_n)^{-1}, \text{ donde los } u_i \in A, n \geq 0. \\
&\iff x = u_n^{-1} \cdot u_{n-1}^{-1} \cdots u_1^{-1}, \text{ donde los } u_i \in A, n \geq 0. \\
&\iff x \in (A^{-1})^*.
\end{aligned}$$

6. **Ejercicio**

Ejercicio ¿Se pueden generalizar las propiedades 2 y 3 anteriores para uniones e intersecciones arbitrarias, respectivamente?

1.13. Lenguajes regulares

Los **lenguajes regulares** sobre un alfabeto dado Σ son todos los lenguajes que se pueden formar a partir de los lenguajes básicos \emptyset , $\{\lambda\}$, $\{a\}$, $a \in \Sigma$, por medio de las operaciones de unión, concatenación y estrella de Kleene.

Podemos dar una definición recursiva de los lenguajes regulares. Sea Σ un alfabeto.

1. \emptyset , $\{\lambda\}$ y $\{a\}$, para cada $a \in \Sigma$, son lenguajes regulares sobre Σ . Estos son los denominados lenguajes regulares básicos.
2. Si A y B son lenguajes regulares sobre Σ , también lo son

$$\begin{array}{ll}
A \cup B & \text{(unión)} \\
A \cdot B & \text{(concatenación)} \\
A^* & \text{(estrella de Kleene)}
\end{array}$$

Obsérvese que Σ y Σ^* son lenguajes regulares sobre Σ .

Ejemplos Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Los siguientes son lenguajes regulares sobre Σ .

1. El lenguaje A de todas las palabras que tienen exactamente una a :

$$A = \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}^*.$$

2. El lenguaje B de todas las palabras que comienzan con b :

$$B = \{b\} \cdot \{a, b\}^*.$$

3. El lenguaje C de todas las palabras que contienen la cadena ba :

$$C = \{a, b\}^* \cdot \{ba\} \cdot \{a, b\}^*.$$

4. $(\{a\} \cup \{b\}^*) \cdot \{a\}$.

5. $[(\{a\}^* \cup \{b\}^*) \cdot \{b\}]^*$.

1.14. Expresiones regulares

Las expresiones regulares representan lenguajes regulares y su propósito es simplificar la escritura de los lenguajes regulares.

La siguiente es la definición recursiva de las **expresiones regulares** sobre un alfabeto Σ dado.

1. Expresiones regulares básicas:

- \emptyset es una expresión regular que representa al lenguaje \emptyset .
- λ es una expresión regular que representa al lenguaje $\{\lambda\}$.
- a es una expresión regular que representa al lenguaje $\{a\}$, $a \in \Sigma$.

2. Si R y S son expresiones regulares sobre Σ , también lo son:

$$\begin{array}{c} RS \\ R \cup S \\ R^* \end{array}$$

RS representa la concatenación de los lenguajes representados por R y S ; $R \cup S$ representa su unión, y R^* representa la clausura de Kleene del lenguaje representado por R .

Ejemplo Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$,

$$(a \cup b^*)a^*(bc)^*$$

es una expresión regular que representa al lenguaje

$$(\{a\} \cup \{b\}^*) \cdot \{a\}^* \cdot \{bc\}^*.$$

Ejemplo Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$,

$$(\lambda \cup a)^*(a \cup b)^*(ba)^*$$

es una expresión regular que representa al lenguaje

$$(\{\lambda\} \cup \{a\})^* \cdot \{a, b\}^* \cdot \{ba\}^*.$$

Ejemplos Los tres primeros lenguajes de la sección 1.13 podemos representarlos con expresiones regulares:

1. El lenguaje A de todas las palabras que tienen exactamente una a :

$$A = b^*ab^*.$$

2. El lenguaje B de todas las palabras que comienzan con b :

$$B = b(a \cup b)^*.$$

3. El lenguaje C de todas las palabras que contienen la cadena ba :

$$C = (a \cup b)^*ba(a \cup b)^*.$$

Observación: La representación de lenguajes regulares por medio de expresiones regulares no es única. Es posible que haya varias expresiones regulares diferentes para el mismo lenguaje. Por ejemplo, $b(a \cup b)^*$ y $b(b \cup a)^*$ representan el mismo lenguaje. Otro ejemplo: las dos expresiones regulares

$$(a \cup b)^* \quad (a^*b^*)^*$$

representan el mismo lenguaje en razón de la [igualdad \(1.1\)](#) de la [sección 1.11](#).

Ejemplos Encontrar expresiones regulares que representen los siguientes lenguajes, definidos sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Lenguaje de todas las palabras que comienzan con b y terminan con a .

Solución: $b(a \cup b)^*a$.

2. Lenguaje de todas las palabras que tienen exactamente dos a 's.

Solución: $b^*ab^*ab^*$.

3. Lenguaje de todas las palabras que tienen un número par de símbolos (palabras de longitud par).

Solución: $(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$.

4. Lenguaje de todas las palabras que tienen un número impar de símbolos (palabras de longitud impar).

Solución: $a(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^* \cup b(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$.

5. Lenguaje de todas las palabras que tienen un número par de a 's.

Soluciones:

$$b^*(ab^*a)^*b^*.$$

$$(ab^*a \cup b)^*.$$

$$(b^*ab^*ab^*)^* \cup b^*.$$

$$b^*(b^*ab^*ab^*)^*b^*.$$

Ejemplo Encontrar una expresión regular que represente el lenguaje de todas las palabras que no contienen la cadena bc , definido sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Solución: $c^*(b \cup ac^*)^*$.

Ejercicio Encontrar expresiones regulares para los siguientes lenguajes:

1. $\Sigma = \{a, b\}$. Lenguaje de todas las palabras que tienen la cadena ab un número par de veces.
2. $\Sigma = \{a, b\}$. Lenguaje de todas las palabras que tienen un número impar de a 's.
3. $\Sigma = \{a, b\}$. Lenguaje de todas las palabras que tienen un número par de a 's o un número impar de b 's.
4. $\Sigma = \{a, b, c\}$. Lenguaje de todas las palabras que tienen un número par de símbolos.
5. $\Sigma = \{a, b, c\}$. Lenguaje de todas las palabras que tienen un número impar de símbolos.
6. $\Sigma = \{a, b, c\}$. Lenguaje de todas las palabras que comienzan con c y terminan con b .
7. $\Sigma = \{a, b, c\}$. Lenguaje de todas las palabras que no contienen la cadena cc .

8. (Opcional, ¡Difícil!) $\Sigma = \{a, b\}$. Lenguaje de todas las palabras que tienen un número par de a 's y un número impar de b 's.

Observación:

No todos los lenguajes sobre un alfabeto dado Σ son regulares. Más adelante se mostrará que el lenguaje

$$L = \{\lambda, ab, aabb, aaabbb, \dots\} = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

sobre $\Sigma = \{a, b\}$ no se puede representar por medio de una expresión regular, y por lo tanto, no es un lenguaje regular.