4.8. Eliminación de las producciones λ

4.8.1. Definiciones.

(i) Una producción de la forma $A \to \lambda$ se llama **producción** λ.

(ii) Una variable A se llama **anulable** si $A \overset{*}{\Rightarrow} \lambda$.

4.8.2. Algoritmo para encontrar las variables anulables.

$\mathbf{ANUL}_1 := \{A \in V : A \to \lambda \text{ es una producción}\}.$

$\mathbf{ANUL}_{i+1} := \mathbf{ANUL}_i \cup \big\{A \in V : \exists \text{ producción } A \to w, w \in (\mathbf{ANUL}_i)^*\big\}.$

Obtenemos una sucesión creciente de conjuntos de variables:

$$\mathbf{ANUL}_1 \subseteq \mathbf{ANUL}_2 \subseteq \mathbf{ANUL}_3 \subseteq \cdots$$

Como el conjunto de variables es finito, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbf{ANUL}_k = \mathbf{ANUL}_{k+1} = \mathbf{ANUL}_{k+2} = \cdots$$

El conjunto **ANUL** de variables anulables es entonces

$$\mathbf{ANUL} := \bigcup_{i \geq 1} \mathbf{ANUL}_i$$

El anterior algoritmo se puede presentar de la siguiente forma:

> INICIALIZAR:
> $\quad\mathbf{ANUL} := \{A \in V : A \to \lambda \text{ es una producción}\}$
> REPETIR:
> $\quad\mathbf{ANUL} := \mathbf{ANUL} \cup \big\{A \in V : \exists \text{ prod. } A \to w,\ w \in (\mathbf{ANUL})^*\big\}$
> HASTA:
> $\quad$No se añaden nuevas variables a **ANUL**

4.8.3 Teorema. *Dada una GIC G, se puede construir una GIC G' equivalente a G sin producciones λ, excepto (posiblemente) $S \to \lambda$.*

<u>*Demostración*</u>: Una vez que haya sido determinado el conjunto **ANUL** de variables anulables, por medio del algoritmo algoritmo 4.8.2, las producciones de λ se pueden eliminar (excepto $S \to \lambda$) añadiendo nuevas producciones que simulen el efecto de las producciones λ eliminadas. Más concretamente, por cada producción $A \to u$ de G se

añaden las producciones de la forma $A \to v$ obtenidas suprimiendo de la cadena u una, dos o más variables anulables presentes, de todas las formas posibles. La gramática G' así obtenida es equivalente a la gramática original G. $\square$

Ejemplo Eliminar las producciones λ de la siguiente gramática G.

$$G: \quad \begin{cases} S \to AB \mid ACA \mid ab \\ A \to aAa \mid B \mid CD \\ B \to bB \mid bA \\ C \to cC \mid \lambda \\ D \to aDc \mid CC \mid ABb \end{cases}$$

Solución: Primero encontramos las variables anulables de G por medio del algoritmo 4.8.2:

$$\begin{aligned} &\mathbf{ANUL}_1 = \{C\} \\ &\mathbf{ANUL}_2 = \{C\} \cup \{D\} = \{C, D\} \\ &\mathbf{ANUL}_3 = \{C, D\} \cup \{A\} = \{C, D, A\} \\ &\mathbf{ANUL}_4 = \{C, D, A\} \cup \{S\} = \{C, D, A, S\} \\ &\mathbf{ANUL}_5 = \{C, D, A, S\} \cup \{\ \} = \{C, D, A, S\} \end{aligned}$$

Al eliminar de G la producciones λ (la única es $C \to \lambda$) se obtiene la siguiente gramática equivalente a G:

$$G': \quad \begin{cases} S \to AB \mid ACA \mid ab \mid B \mid CA \mid AA \mid AC \mid A \mid C \mid \lambda \\ A \to aAa \mid B \mid CD \mid aa \mid C \mid D \\ B \to bB \mid bA \mid b \\ C \to cC \mid c \\ D \to aDc \mid CC \mid ABb \mid ac \mid C \mid Bb \end{cases}$$

Ejercicios de la sección 4.8

1. Eliminar las producciones λ de la siguiente gramática:

$$G: \quad \begin{cases} S \longrightarrow BCB \\ A \longrightarrow aA \mid ab \\ B \longrightarrow bBa \mid A \mid DC \\ C \longrightarrow aCb \mid D \mid b \\ D \longrightarrow aB \mid \lambda \end{cases}$$

2. Eliminar las producciones λ de la siguiente gramática:

$$G: \quad \begin{cases} S \to EA \mid SaBb \mid aEb \\ A \to DaD \mid bD \mid BEB \\ B \to bB \mid Ab \mid \lambda \\ D \to aEb \mid ab \\ E \to aA \mid bB \mid \lambda \end{cases}$$