3.3. Propiedades de clausura para autómatas

Las propiedades de clausura del teorema 3.2.1 se pueden enunciar como procedimientos algorítmicos para la construcción de autómatas finitos.

3.3.1 Teorema. *Sean M, M_1 y M_2 autómatas finitos (ya sean AFD o AFN o AFN-λ) y $L(M) = L$, $L(M_1) = L_1$, $L(M_2) = L_2$. Se pueden construir autómatas finitos que acepten los siguientes lenguajes:*

(1)	$L_1 \cup L_2$.	(5)	$\overline{L} = \Sigma^* - L$.
(2)	$L_1 L_2$.	(6)	$L_1 \cap L_2$.
(3)	L^*.	(7)	$L_1 - L_2$.
(4)	L^+.	(8)	$L_1 \lhd L_2$.

<u>*Demostración*</u>: La construcción de autómatas para $L_1 \cup L_2$, L_1L_2, L^* y L^+ se presentó en la demostración de la parte I del Teorema de Kleene. En el numeral (5) del teorema 3.2.1 se vio cómo se puede construir un AFD M' que acepte $\overline{L}$ a partir de un AFD M que acepte L.

Los procedimientos de construcción de (1), (2), (3), (4) y (5) se pueden combinar para obtener autómatas que acepten los lenguajes $L_1 \cap L_2$, $L_1 - L_2$ y $L_1 \lhd L_2$. □

Para diseñar un autómata que acepte $L_1 \cap L_2$, según el argumento del teorema 3.3.1, hay que usar la igualdad $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ y los procedimientos para unión, complemento, eliminación de transiciones λ y eliminación del no-determinismo. El siguiente teorema muestra que existe una construcción más sencilla para el caso $L_1 \cap L_2$.

3.3.2 Teorema. *Sean $M_1 = (\Sigma, Q_1, q_1, F_1, \delta_1)$ y $M_2 = (\Sigma, Q_2, q_2, F_2, \delta_2)$ dos AFD. Entonces el AFD*

$$M = (\Sigma, Q_1 \times Q_2, (q_1, q_2), F_1 \times F_2, \delta)$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \delta : (Q_1 \times Q_2) \times \Sigma & \longrightarrow & Q_1 \times Q_2 \\ \delta((q_i, q_j), a) & = & (\delta_1(q_i, a), \delta_2(q_j, a)) \end{array}$$

satisface $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$.

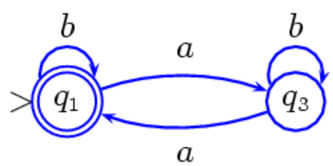
<u>*Demostración*</u>: Sea $w \in \Sigma^*$. La conclusión del teorema se sigue demostrando primero por inducción sobre w que $\delta((q_1, q_2), w) = (\delta_1(q_1, w), \delta_2(q_2, w))$ para toda

cadena $w \in \Sigma^*$ y observando que:

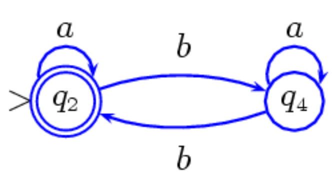
$$\begin{aligned}
w \in L(M) &\iff \delta((q_1, q_2), w) \in F_1 \times F_2 \\
&\iff (\delta_1(q_1, w), \delta_2(q_2, w)) \in F_1 \times F_2 \\
&\iff \delta(q_1, w) \in F_1 \quad \& \quad \delta(q_2, w) \in F_2 \\
&\iff w \in L(M_1) \quad \& \quad w \in L(M_2) \\
&\iff w \in L(M_1) \cap L(M_2). \qquad \square
\end{aligned}$$

Ejemplo Utilizar el teorema teorema 3.3.2 para construir un AFD que acepte el lenguaje L de todas las cadenas sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que tienen un número par de $a$es y un número par de $b$es.

AFD M_1 que acepta las cadenas con un número par de $a$es:



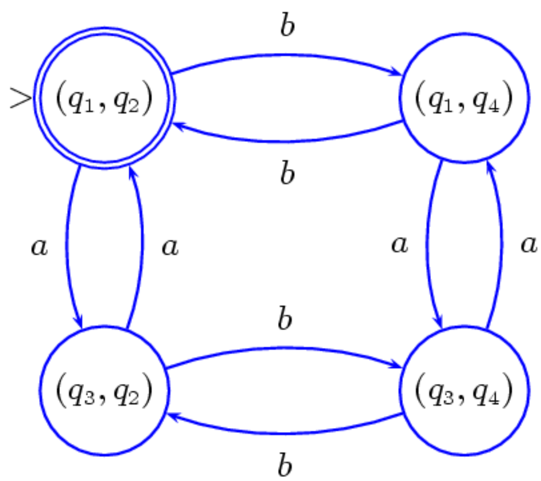
AFD M_2 que acepta las cadenas con un número par de $b$es:



Entonces $L = L(M_1) \cap L(M_2)$. El nuevo autómata tiene 4 estados: (q_1, q_2), (q_1, q_4), (q_3, q_2) y (q_3, q_4); el único estado de aceptación es (q_1, q_2). Su función de transición δ es

$$\begin{aligned}
\delta((q_1, q_2), a) &= (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)) = (q_3, q_2) \\
\delta((q_1, q_2), b) &= (\delta_1(q_1, b), \delta_2(q_2, b)) = (q_1, q_4) \\
\delta((q_1, q_4), a) &= (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_4, a)) = (q_3, q_4) \\
\delta((q_1, q_4), b) &= (\delta_1(q_1, b), \delta_2(q_4, b)) = (q_1, q_2) \\
\delta((q_3, q_2), a) &= (\delta_1(q_3, a), \delta_2(q_2, a)) = (q_1, q_2) \\
\delta((q_3, q_2), b) &= (\delta_1(q_3, b), \delta_2(q_2, b)) = (q_3, q_4) \\
\delta((q_3, q_4), a) &= (\delta_1(q_3, a), \delta_2(q_4, a)) = (q_1, q_4) \\
\delta((q_3, q_4), b) &= (\delta_1(q_3, b), \delta_2(q_4, b)) = (q_3, q_2)
\end{aligned}$$

El diagrama de estados del autómata así obtenido es:



Ejercicios de la sección 3.3

1. Utilizar el teorema 3.3.2 para construir AFD que acepten los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$:

   (i) El lenguaje L de todas las cadenas que tienen longitud par y terminan en a.

   (ii) El lenguaje L de todas las cadenas de longitud par que tengan un número impar de $b$es.

   (iii) El lenguaje L de todas las cadenas de longitud impar que tengan un número par de $c$es.

   (iv) El lenguaje L de todas las cadenas de longitud impar que tengan exactamente dos $a$es.

2. Utilizar el procedimiento del teorema 3.3.1 para construir un autómata que acepte el lenguaje L de todas las cadenas sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que tienen un número par de $a$es y un número par de $b$es. Compárese con el AFD construido en el último ejemplo de esta sección.