4.6. Gramáticas regulares

4.6.1 Definición. Una GIC se llama **regular** si sus producciones son de la forma

$$\begin{cases} A \to aB, & a \in \Sigma,\ B \in V. \\ A \to \lambda. \end{cases}$$

Los siguientes teoremas establecen la conexión entre los lenguajes regulares y las gramáticas regulares.

4.6.2 Teorema. *Dado un AFD $M = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$, existe una GIC regular $G = (V, \Sigma, S, P)$ tal que $L(M) = L(G)$.*

<u>*Demostración*</u>: Sea $V = Q$ y $S = q_0$. Las producciones de G están dadas por

$$\begin{cases} q \to ap & \text{si y sólo si } \delta(q,a) = p. \\ q \to \lambda & \text{si y sólo si } q \in F. \end{cases}$$

Demostraremos primero que para toda $w \in \Sigma^*$, $w \neq \lambda$ y para todo $p, q \in Q$ se tiene

(1) Si $\delta(q,w) = p$ entonces $q \stackrel{*}{\Rightarrow} wp$.

La demostración de (1) se hace por inducción sobre w. Si $w = a$ y $\delta(q,a) = p$, entonces $q \to ap$ es una producción de G y obviamente se concluye $q \Rightarrow ap$. Para el paso inductivo, sea $\delta(q, wa) = p'$. Entonces

$$p' = \delta(q, wa) = \delta(\delta(q,w), a) = \delta(p, a)$$

donde $\delta(q,w) = p$. Por hipótesis de inducción $q \stackrel{*}{\Rightarrow} wp$ y como $\delta(p,a) = p'$, entonces $p \Rightarrow ap'$. Por lo tanto,

$$q \stackrel{*}{\Rightarrow} wp \Rightarrow wap'$$

que era lo que se quería demostrar.

A continuación demostraremos el recíproco de (1): para toda $w \in \Sigma^*$, $w \neq \lambda$ y para todo $p, q \in Q$ se tiene

(2) Si $q \stackrel{*}{\Rightarrow} wp$ entonces $\delta(q,w) = p$.

La demostración de (2) se hace por inducción sobre la longitud de la derivación $q \stackrel{*}{\Rightarrow} wp$, es decir, por el número de pasos o derivaciones directas que hay en $q \stackrel{*}{\Rightarrow} wp$. Si la derivación tiene longitud 1, necesariamente $q \Rightarrow ap$ lo cual significa que $\delta(q,a) = p$.

Para el paso inductivo, supóngase que $q \stackrel{*}{\Rightarrow} wp$ tiene longitud $n+1$, $w = w'a$ y en el último paso se aplica la producción $p' \to ap$. Entonces

$$q \stackrel{*}{\Rightarrow} w'p' \Rightarrow w'ap = wp.$$

Por hipótesis de inducción, $\delta(q, w') = p'$ y por consiguiente

$$\delta(q, w) = \delta(q, w'a) = \delta(\delta(q, w'), a) = \delta(p', a) = p,$$

que era lo que se quería demostrar.

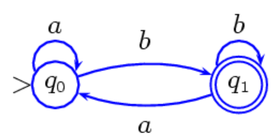
Como consecuencia de (1) y (2) se puede ahora demostrar que

(3) Para toda cadena $w \in \Sigma^*$, $\delta(q_0, w) \in F$ si y sólo si $S \stackrel{*}{\Rightarrow}_G w$,

lo cual afirma que $L(M) = L(G)$. En efecto, si $w = \lambda$, $\delta(q_0, w) \in F$ si y sólo si $q_0 \in F$. Por lo tanto, $q_0 \to \lambda$ es una producción de G. Así que $S \Rightarrow \lambda$. Recíprocamente, si $S \stackrel{*}{\Rightarrow} \lambda$, necesariamente $S \Rightarrow \lambda$, $q_0 \in F$ y $\delta(q_0, \lambda) \in F$.

Sea ahora $w \neq \lambda$. Si $\delta(q_0, w) = p \in F$, por (1) se tiene $q_0 \stackrel{*}{\Rightarrow} w$, o sea, $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$. Recíprocamente, si $S \stackrel{*}{\Rightarrow}_G w$, entonces $q_0 \stackrel{*}{\Rightarrow}_G wp \Rightarrow w$ donde $p \to \lambda$. Utilizando (2), se tiene $\delta(q_0, w) = p \in F$. □

Ejemplo El siguiente AFD M, presentado en el último ejemplo de la sección 2.3, acepta las cadenas que terminan en b:



M induce la gramática regular

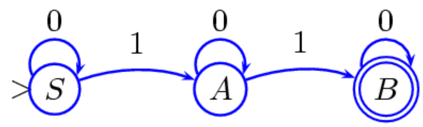
$$G: \quad \begin{cases} q_0 \to aq_0 \mid bq_1 \\ q_1 \to bq_1 \mid aq_0 \mid \lambda \end{cases}$$

que cumple $L(M) = L(G)$. Las variables de G son q_0 y q_1, siendo q_0 la variable inicial.

Ejemplo Para el lenguaje regular $0^*10^*10^*$, sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ (el lenguaje de todas las cadenas con exactamente dos unos), vimos en la sección 4.1 una gramática que lo genera:

$$\begin{cases} S \to A1A1A \\ A \to 0A \mid \lambda \end{cases}$$

Esta gramática no es regular, pero por medio del AFD



y el Teorema 4.6.2 se puede obtener una GIC regular que genere $0^*10^*10^*$:

$$\begin{cases} S \to 0S \mid 1A \\ A \to 0A \mid 1B \\ B \to 0B \mid \lambda \end{cases}$$

4.6.3 Teorema. *Dada una GIC regular $G = (V, \Sigma, S, P)$, existe un AFN $M = (Q, \Sigma, q_0, F, \Delta)$ tal que $L(M) = L(G)$.*

Demostración: Se construye $M = (Q, \Sigma, q_0, F, \Delta)$ haciendo $Q = V$, $q_0 = S$ y

$$\begin{cases} B \in \Delta(A, a) & \text{para cada producción } A \to aB. \\ A \in F & \text{si } A \to \lambda. \end{cases}$$

Usando razonamientos similares a los del Teorema 4.6.2, se puede demostrar que

$$A \overset{*}{\Rightarrow}_G wB \quad \text{si y sólo si} \quad B \in \Delta(A, w), \text{ para todo } w \in \Sigma^*, \ w \neq \lambda,$$

de donde $L(M) = L(G)$. Los detalles se dejan como ejercicio. □

4.6.4 Corolario.

1. *Un lenguaje es regular si y solamente si es generado por una gramática regular.*
2. *Todo lenguaje regular es un LIC (pero no viceversa).*

Demostración:

1. Se sigue del Teorema 4.6.2, Teorema 4.6.3 y del Teorema de Kleene.
2. Se sigue de la parte 1. Por otro lado, $\{a^i b^i : i \geq 0\}$ es LIC pero no es regular. □

4.6.5 Definición. Una GIC se llama **regular por la derecha** si sus producciones son de la forma

$$\begin{cases} A \to wB, \quad w \in \Sigma^*, \ B \in V, \\ A \to \lambda \end{cases}$$

4.6.6 Teorema. *Las gramáticas regulares y las gramáticas regulares por la derecha generan los mismos lenguajes, es decir, los lenguajes regulares. Dicho de otra manera, la definición de gramática regular es equivalente a la definición de gramática regular por la derecha.*

Demostración: Una gramática regular es obviamente regular por la derecha. Recíprocamente, en una gramática regular por la derecha $G = (V, \Sigma, S, P)$, una producción de la forma

$$A \to a_1 a_2 \cdots a_n B$$

donde los $a_i \in \Sigma$, $n \geq 2$, $B \in V$, se puede simular con producciones de la forma $A \to aB$ y $A \to \lambda$. En efecto, se introducen $n-1$ variables *nuevas* $A_1, \ldots, A_{n-1}$ cuyas *únicas* producciones son:

$$\begin{array}{lcl} A & \to & a_1 A_1 \\ A_1 & \to & a_2 A_2 \\ & \vdots & \\ A_{n-1} & \to & a_n B \end{array}$$

De esta manera se puede construir una gramática regular equivalente a G. $\square$

Ejercicios de la sección 4.6

1. Encontrar GIC regulares que generen los siguientes lenguajes:

   (i) ab^*a.

   (ii) $(ab \cup ba)^*$.

   (iii) $a^+b \cup b^+a^*b$.

   (iv) $0^*(10^* \cup 01^*)$.

2. Una GIC se llama **regular por la izquierda** si sus producciones son de la forma:

$$\begin{cases} A \to Bw, \quad w \in \Sigma^*, \; B \in V \\ A \to \lambda \end{cases}$$

   Demostrar que las gramáticas regulares y las gramáticas regulares por la izquierda generan los mismos lenguajes.

3. Completar los detalles de la demostración del Teorema 4.6.3.