5.3. Aceptación por pila vacía

En todos los modelos de autómatas que hemos considerado en este curso, la aceptación de cadenas está determinada por los estados finales o de aceptación. Para los autómatas con pila existe otra noción de aceptación: la aceptación por pila vacía, definida a continuación. Cuando se usa esta noción, los autómatas no requieren un conjunto F de estados finales, solamente los seis restantes componentes: $(Q, q_0, \Sigma, \Gamma, s_0, \Delta)$.

5.3.1 Definición. Dado un autómata con pila $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, s_0, \Delta)$, ya sea AFPD o AFPN, el **lenguaje aceptado por M por pila vacía** se define como

$$N(M) := \{w \in \Sigma^* : \text{existe un cómputo } (q_0, w, s_0) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, \lambda)\}.$$

O sea, una cadena es aceptada por pila vacía si se puede ir, en cero, uno o más pasos, desde la configuración inicial hasta una configuración en la que la pila esté completamente desocupada[1]. Nótese que, para ser aceptada, la cadena de entrada w debe ser procesada completamente.

Para AFPN las nociones de aceptación por pila vacía y por estados finales resultan ser equivalentes, como se establece en los dos siguientes teoremas. Es importante anotar que para autómatas deterministas AFPD los dos tipos de aceptación *no* son equivalentes.

5.3.2 Teorema. *Si $L = L(M)$ para algún autómata con pila AFPN M, entonces $L = N(M')$ para algún AFPN M'. Es decir, M' acepta por pila vacía lo que M acepta por estado final.*

Demostración: Sea $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, s_0, \Delta)$. M' se diseña modificando M de tal manera que vacíe su pila cuando M haya aceptado una cadena de entrada. Concretamente, se define M' como

$$M' = (Q \cup \{p_0, p\}, p_0, \Sigma, \Gamma \cup \{r_0\}, r_0, \Delta')$$

donde p_0 (estado inicial) y p son estados nuevos, y r_0 es el nuevo símbolo inicial de pila. La función de transición Δ' se define así:

1. $\Delta'(p_0, \lambda, r_0) = \{(q_0, s_0 r_0)\}$. Transición λ mediante la cual el nuevo símbolo inicial de pila se coloca en el fondo. Esto impedirá que una cadena sea accidentalmente aceptada si el autómata original M vacía la pila.

[1] La N en la notación $N(M)$ proviene de la expresión 'pila nula', sinónimo de 'pila vacía'.

2. $\Delta(q, a, s) \subseteq \Delta'(q, a, s)$ para todo $q \in Q$, $a \in \Sigma$ ó $a = \lambda$ y $s \in \Gamma$. Esto quiere decir que M' simula a M: todas las transiciones del autómata original también se pueden realizar en el nuevo autómata.

3. $(p, s) \in \Delta'(q, \lambda, s)$ para todo $q \in F$, $s \in \Gamma \cup \{r_0\}$. Mediante esta transición λ, M' pasa al nuevo estado p siempre que q sea un estado de aceptación.

4. $\Delta'(p, \lambda, s) = \{(p, \lambda)\}$. Mediante esta transición λ, M' borra todo el contenido de la pila.

Obsérvese que las transiciones λ de los numerales 3 y 4 no consumen ningún símbolo en la cadena de entrada. Además, la única manera de que M' vacíe completamente la pila es ingresando al estado p, lo cual puede hacer únicamente desde un estado de aceptación de M.

Si w es aceptada por M, o sea si $w \in L(M)$, M realiza un cómputo de la forma

$$(q_0, w, s_0) \overset{*}{\vdash} (q, \lambda, \beta)$$

donde $q \in F$ y $\beta \in \Gamma^*$. Entonces en M' se puede efectuar el siguiente cómputo:

$$(p_0, w, r_0) \vdash (q_0, w, s_0 r_0) \overset{*}{\vdash} (q, \lambda, \beta r_0) \vdash (p, \lambda, \beta r_0) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, \lambda).$$

Por lo tanto, $w \in N(M')$.

Un razonamiento similar muestra que $w \in N(M')$ implica $w \in L(M)$. En conclusión, $L(M) = N(M')$. □

5.3.3 Teorema. *Si $L = N(M)$ para algún autómata con pila AFPN M, entonces $L = L(M')$ para algún AFPN M'. Es decir, M' acepta por estado final lo que M acepta por pila vacía.*

<u>*Demostración*</u>: Sea $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, s_0, \Delta)$ un AFPN que acepta por pila vacía. M' se diseña añadiendo un nuevo estado q_f a M de tal manera que M' ingrese a tal estado (único estado de aceptación) solamente cuando M haya vaciado su pila. Concretamente, se define M' como

$$M' = (Q \cup \{p_0, p_f\}, p_0, \{p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{r_0\}, r_0, \Delta')$$

donde p_0 (estado inicial) y p_f (único estado de aceptación) son estados nuevos, y r_0 es el nuevo símbolo inicial de pila. La función de transición Δ' se define así:

1. $\Delta'(p_0, \lambda, r_0) = \{(q_0, s_0r_0)\}$. Transición λ mediante la cual el nuevo símbolo inicial de pila se coloca en el fondo. Cuando M' encuentre el marcador de fondo r_0, sabrá que M ha vaciado su pila.
2. $\Delta(q, a, s) \subseteq \Delta'(q, a, s)$ para todo $q \in Q$, $a \in \Sigma$ ó $a = \lambda$ y $s \in \Gamma$. Esto quiere decir que M' simula a M: todas las transiciones del autómata original también se pueden realizar en el nuevo autómata.
3. $(p_f, s) \in \Delta'(q, \lambda, r_0)$ para todo $q \in Q$. Mediante esta transición λ, M' pasa al estado de aceptación p_f cuando detecte el marcador de fondo r_0. O sea, M' acepta cuando M vacía su pila.

Si w es aceptada por M, o sea si $w \in N(M)$, M realiza un cómputo de la forma

$$(q_0, w, s_0) \overset{*}{\vdash} (q, \lambda, \lambda)$$

donde $q \in Q$. Entonces en M' se puede efectuar el siguiente cómputo:

$$(p_0, w, r_0) \vdash (q_0, w, s_0r_0) \overset{*}{\vdash} (q, \lambda, r_0) \vdash (p_f, \lambda, r_0).$$

Por lo tanto, $w \in L(M')$.

Un razonamiento similar muestra que $w \in L(M')$ implica $w \in N(M)$. En conclusión, $N(M) = L(M')$. □

Ejercicios de la sección 5.3

1. Modificar los autómatas de los tres ejemplos de la sección 5.2 para que acepten por pila vacía y no por estado final.
2. Diseñar AFPN que acepten los siguientes lenguajes por pila vacía:
   (i) $L = \{a^ib^{2i} : i \geq 1\}$, sobre $\Sigma = \{a, b\}$.
   (ii) $L = \{a^{2i}b^i : i \geq 1\}$, sobre $\Sigma = \{a, b\}$.
   (iii) $L = \{0^i1^j : 0 \leq i \leq j \leq 2i\}$, sobre $\Sigma = \{0, 1\}$.
   (iv) $L = \{0^i1^j : i, j \geq 0, i \neq j\}$, sobre $\Sigma = \{0, 1\}$.
3. Completar los detalles faltantes en las demostraciones del Teorema 5.3.2 y el Teorema 5.3.3. ¿Por qué estas demostraciones no son válidas para autómatas deterministas?