5.5. Autómatas con pila y LIC (Parte II)

En la presente sección consideraremos la segunda parte de la correspondencia entre AFPN y LIC. Demostraremos que para todo AFPN que acepta por pila vacía existe una GIC que genera el lenguaje aceptado por el autómata. Las gramáticas obtenidas son, en general, bastante complejas, con un gran número de variables y de producciones. Hay que advertir también que el procedimiento puede dar lugar a variables inútiles (no-terminables o no alcanzables).

5.5.1 Teorema. *Dado un AFPN* $M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, s_0, \Delta)$ *que acepta por pila vacía, existe una GIC* $G = (\Sigma, V, S, P)$ *tal que* $L(G) = N(M)$.

<u>*Demostración*</u>: En la gramática G las variables (aparte de la variable inicial S) serán tripletas de la forma $[qXp]$ donde q, $p \in Q$ y $X \in \Gamma$. Las producciones de G se definen de la siguiente manera:

1. Si $(p, \lambda) \in \Delta(q, a, X)$, se añade la producción $[qXp] \to a$.
2. Si $(p, \lambda) \in \Delta(q, \lambda, X)$, se añade la producción $[qXp] \to \lambda$.
3. Si $(r, Y_1Y_2 \cdots Y_k) \in \Delta(q, a, X)$, donde a puede ser un símbolo del alfabeto Σ ó $a = \lambda$ y $k \geq 1$, se añaden todas las producciones de la forma

$$[qXr_k] \to a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \cdots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

para todas las secuencias posibles r_1, r_2, $\ldots$, r_{k-1} de estados de Q.

4. Para todo $p \in Q$ se añade la producción $S \to [q_0s_0p]$.

La gramática G así definida pretende simular con derivaciones a izquierda los cómputos de M; el significado intuitivo de la variable $[qXp]$ es: "al extraer X del tope de la pila, se pasa del estado q al estado p". La producción

$$[qXr_k] \to a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \cdots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

del numeral 3 indica las posibles maneras en las que M puede extraer la cadena $Y_1Y_2 \cdots Y_k$ de la pila, una vez se haya sustituido el tope de la pila X por dicha cadena, pasando del estado q al estado r y consumiendo el símbolo a.

Demostraremos primero la inclusión $N(M) \subseteq L(G)$. Para todo q, $p \in Q$, $X \in \Gamma$ y $w \in \Sigma^*$, se demostrará la implicación

$$\text{si } (q, w, X) \overset{+}{\vdash} (p, \lambda, \lambda) \text{ entonces } [qXp] \overset{+}{\Longrightarrow} w, \tag{5.1}$$

por inducción sobre el número de pasos del cómputo $(q, w, X) \overset{+}{\vdash} (p, \lambda, \lambda)$. Cuando hay un sólo paso, el cómputo es de la forma $(q, a, X) \vdash (p, \lambda, \lambda)$ o de la forma $(q, \lambda, X) \vdash (p, \lambda, \lambda)$. Si $(q, a, X) \vdash (p, \lambda, \lambda)$, entonces $(p, \lambda) \in \Delta(q, a, X)$; así que $[qXp] \to a$ es una producción de G, y se obtendrá la derivación $[qXp] \Rightarrow a$. Si $(q, \lambda, X) \vdash (p, \lambda, \lambda)$, entonces $(p, \lambda) \in \Delta(q, \lambda, X)$; así que $[qXp] \to \lambda$ es una producción de G y se obtendrá $[qXp] \Rightarrow \lambda$.

Para el razonamiento inductivo, supóngase que $(q, w, X) \overset{n}{\vdash} (p, \lambda, \lambda)$ donde $n > 1$. Considerando el primer paso de este cómputo de n pasos, podemos escribir:

$$(q, ax, X) \vdash (r_0, x, Y_1Y_2 \cdots Y_k) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, \lambda), \tag{5.2}$$

donde $a \in \Sigma$ ó $a = \lambda$. Cuando $a \in \Sigma$, $w = ax$ para alguna cadena $x \in \Sigma^*$; cuando $a = \lambda$, $x = w$. En el primer paso de 5.2 se ha aplicado la transición $(r_0, Y_1Y_2 \cdots Y_k) \in \Delta(q, a, X)$ de M. Por la definición de la gramática G,

$$[qXr_k] \to a[r_0Y_1r_1][r_1Y_2r_2] \cdots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

es una producción, para todas las secuencias posibles r_1, r_2, $\ldots$, r_{k-1} de estados de Q.

Según 5.2, desde la configuración instantánea $(r_0, x, Y_1Y_2 \cdots Y_k)$ el autómata llega hasta la configuración (p, λ, λ), consumiendo completamente la cadena x y vaciando la pila. La cadena x se puede escribir entonces como $x = w_1w_2 \cdots w_k$, siendo w_i la cadena consumida por el autómata para extraer el símbolo Y_i del tope de la pila. En consecuencia, existe una secuencia de estados r_1, r_2,..., r_{k-1}, $r_k = p$ tales que

$$\begin{aligned}(r_0, x, Y_1Y_2 \cdots Y_k) = (r_0, w_1w_2 \cdots w_k, Y_1Y_2 \cdots Y_k) &\overset{+}{\vdash} (r_1, w_2 \cdots w_k, Y_2 \cdots Y_k) \\ &\overset{+}{\vdash} (r_2, w_3 \cdots w_k, Y_3 \cdots Y_k) \overset{+}{\vdash} (r_{k-1}, w_k, Y_k) \overset{+}{\vdash} (r_k, \lambda, \lambda).\end{aligned}$$

Para $i = 1, 2, \ldots, k$ se tiene así una secuencia de cómputos parciales

$$(r_{i-1}, w_i, Y_i) \overset{+}{\vdash} (r_i, \lambda, \lambda),$$

donde $r_k = p$. Por la hipótesis de inducción, $[r_{i-1}Y_ir_i] \overset{+}{\Longrightarrow} w_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. Por consiguiente,

$$[qXp] = [qXr_k] \Rightarrow a[r_0Y_1r_1][r_1Y_2r_2] \cdots [r_{k-1}Y_kr_k] \overset{+}{\Longrightarrow} aw_1w_2 \cdots w_k = w.$$

Esto demuestra la implicación 5.1. Por lo tanto, si w es aceptada por M, siendo $w \neq \lambda$, se tendrá $(q_0, w, s_0) \overset{+}{\vdash} (p, \lambda, \lambda)$, y usando 5.1 se concluirá que $S \Rightarrow [q_0s_0p] \overset{+}{\Longrightarrow} w$. Si

$w = \lambda$ es aceptada por M, necesariamente $(q_0, \lambda, s_0) \vdash (p, \lambda, \lambda)$ para algún estado p. Esto significa que $(q_0, \lambda, s_0) \vdash (p, \lambda, \lambda)$, y se tendrá $S \Rightarrow [q_0 s_0 p] \Rightarrow \lambda$. Esto demuestra que $N(M) \subseteq L(G)$.

Para establecer la contenencia $L(G) \subseteq N(M)$ se demuestra la implicación

$$\text{si } [qXp] \overset{+}{\Longrightarrow} w, \text{ entonces } (q, w, X) \overset{+}{\vdash} (p, \lambda, \lambda), \tag{5.3}$$

por inducción sobre el número de pasos en la derivación $[qXp] \overset{+}{\Longrightarrow} w$. Este razonamiento inductivo es similar al usado para probar la implicación recíproca 5.1, y se deja como ejercicio para el lector interesado. Si en G se puede derivar la cadena w, es decir, si $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, la primera producción aplicada será de la forma $S \to [q_0 s_0 p]$. De donde, $S \Rightarrow [q_0 s_0 p] \overset{+}{\Longrightarrow} w$. Usando 5.3 se concluye $(q_0, w, s_0) \overset{+}{\vdash} (p, \lambda, \lambda)$, o sea $w \in N(M)$. $\square$

Ejemplo Vamos a aplicar la construcción del Teorema 5.5.1 para encontrar una gramática G que genere el lenguaje de las cadenas sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ que tienen igual número de $a$es que de $b$es, a partir del AFPN $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, s_0, \Delta)$ con los siguientes componentes. $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{s_0, A, B\}$, $Q = \{q_0, q_1\}$, $F = \{q_1\}$ y la función de transición Δ está dada por:

$$\begin{aligned}
\Delta(q_0, a, s_0) &= \{(q_0, As_0)\},\\
\Delta(q_0, b, s_0) &= \{(q_0, Bs_0)\},\\
\Delta(q_0, a, A) &= \{(q_0, AA)\},\\
\Delta(q_0, b, B) &= \{(q_0, BB)\},\\
\Delta(q_0, a, B) &= \{(q_0, \lambda)\},\\
\Delta(q_0, b, A) &= \{(q_0, \lambda)\},\\
\Delta(q_0, \lambda, s_0) &= \{(q_1, \lambda)\}.
\end{aligned}$$

M es una modificación del autómata presentado en el segundo ejemplo de la sección 5.2 (en ese ejemplo M aceptaba por estado final; aquí M acepta por pila vacía).

Las variables de G son S y todas las tripletas de la forma $[qXp]$ donde q, $p \in Q$ y $X \in \Gamma$. Hay, por lo tanto, 13 variables, a saber:

$$\begin{aligned}
&S,\ [q_0 s_0 q_0],\ [q_0 A q_0],\ [q_0 B q_0],\ [q_0 s_0 q_1],\ [q_0 A q_1],\ [q_0 B q_1],\\
&\quad [q_1 s_0 q_0],\ [q_1 A q_0],\ [q_1 B q_0],\ [q_1 s_0 q_1],\ [q_1 A q_1],\ [q_1 B q_1].
\end{aligned}$$

A continuación se presentan las producciones de G.

Producción obtenida de $\Delta(q_0, \lambda, s_0) = \{(q_1, \lambda)\}$:

$$[q_0 s_0 q_1] \to \lambda.$$

Producción obtenida de $\Delta(q_0, a, B) = \{(q_0, \lambda)\}$:

$$[q_0 B q_0] \to a.$$

Producción obtenida de $\Delta(q_0, b, A) = \{(q_0, \lambda)\}$:

$$[q_0 A q_0] \to b.$$

Producciones obtenidas de $\Delta(q_0, a, s_0) = \{(q_0, As_0)\}$:

$$[q_0 s_0 q_0] \to a[q_0 A q_0][q_0 s_0 q_0] \mid a[q_0 A q_1][q_1 s_0 q_0]$$
$$[q_0 s_0 q_1] \to a[q_0 A q_0][q_0 s_0 q_1] \mid a[q_0 A q_1][q_1 s_0 q_1].$$

Producciones obtenidas de $\Delta(q_0, b, s_0) = \{(q_0, Bs_0)\}$:

$$[q_0 s_0 q_0] \to b[q_0 B q_0][q_0 s_0 q_0] \mid b[q_0 B q_1][q_1 s_0 q_0]$$
$$[q_0 s_0 q_1] \to b[q_0 B q_0][q_0 s_0 q_1] \mid b[q_0 B q_1][q_1 s_0 q_1].$$

Producciones obtenidas de $\Delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\}$:

$$[q_0 A q_0] \to a[q_0 A q_0][q_0 A q_0] \mid a[q_0 A q_1][q_1 A q_0]$$
$$[q_0 A q_1] \to a[q_0 A q_0][q_0 A q_1] \mid a[q_0 A q_1][q_1 A q_1].$$

Producciones obtenidas de $\Delta(q_0, b, B) = \{(q_0, BB)\}$:

$$[q_0 B q_0] \to b[q_0 B q_0][q_0 B q_0] \mid b[q_0 B q_1][q_1 B q_0]$$
$$[q_0 B q_1] \to b[q_0 B q_0][q_0 B q_1] \mid b[q_0 B q_1][q_1 B q_1].$$

Finalmente, las producciones de la variable inicial S son:

$$S \to [q_0 s_0 q_0] \mid [q_0 s_0 q_1].$$

Al examinar las producciones se puede observar que todas las variables de la forma $[q_1 X q]$, con $X \in \Gamma$ y $q \in Q$, son inútiles ya que no tienen producciones. Con la terminología ya conocida, dichas variables son no-terminables y, por consiguiente, las producciones en las que aparecen se pueden eliminar. Otra variable no terminable es $[q_0 s_0 q_0]$. Además, las variables $[q_0 A q_1]$ y $[q_0 B q_1]$ son inalcanzables, así que se pueden eliminar, junto con todas sus producciones. Realizando estas simplificaciones se obtiene la siguiente gramática:

$$\begin{aligned}
S &\to [q_0 s_0 q_1] \\
[q_0 s_0 q_1] &\to a[q_0 A q_0][q_0 s_0 q_1] \mid b[q_0 B q_0][q_0 s_0 q_1] \mid \lambda \\
[q_0 A q_0] &\to a[q_0 A q_0][q_0 A q_0] \mid b \\
[q_0 B q_0] &\to b[q_0 B q_0][q_0 B q_0] \mid a.
\end{aligned}$$

Como se indicó en la demostración, en las gramáticas construidas según el método del Teorema 5.5.1, las derivaciones a izquierda corresponden a los cómputos en el autómata dado. Podemos ilustrar este punto, en el presente ejemplo, con la cadena de entrada $w = bbabaa$. El siguiente es un cómputo de aceptación de w en M:

$$\begin{aligned}
(q_0, bbabaa, s_0) &\vdash (q_0, babaa, Bs_0) \vdash (q_0, abaa, BBs_0) \vdash (q_0, baa, Bs_0) \\
&\vdash (q_0, aa, BBs_0) \vdash (q_0, a, Bs_0) \vdash (q_0, \lambda, s_0) \vdash (q_1, \lambda, \lambda).
\end{aligned}$$

La derivación a izquierda en G que corresponde a este cómputo es:

$$\begin{aligned}
S &\Rightarrow [q_0 s_0 q_1] \Rightarrow b[q_0 B q_0][q_0 s_0 q_1] \Rightarrow bb[q_0 B q_0][q_0 B q_0][q_0 s_0 q_1] \\
&\Rightarrow bba[q_0 B q_0][q_0 s_0 q_1] \Rightarrow bbab[q_0 B q_0][q_0 B q_0][q_0 s_0 q_1] \\
&\Rightarrow bbaba[q_0 B q_0][q_0 s_0 q_1] \Rightarrow bbabaa[q_0 s_0 q_1] \Rightarrow bbabaa.
\end{aligned}$$

Obsérvese que, en cada paso de la derivación, el contenido actual de la pila se puede leer examinando las segundas componentes de las tripletas.

Para hacer más legibles las producciones de la gramática G obtenida en este ejemplo, cambiamos los nombres de las variables así: $C = [q_0 s_0 q_1]$, $D = [q_0 A q_0]$ y $E = [q_0 B q_0]$. Con esta nomenclatura, la gramática se puede escribir como:

$$G: \quad \begin{cases} S \to C \\ C \to aDC \mid bEC \mid \lambda \\ D \to aDD \mid b \\ E \to bEE \mid a. \end{cases}$$

Puesto que la única producción de S es $S \to C$, las variables S y C se pueden identificar, dando lugar a la siguiente gramática simplificada equivalente:

$$\begin{cases} S \to aDS \mid bES \mid \lambda \\ D \to aDD \mid b \\ E \to bEE \mid a. \end{cases}$$

Ejercicios de la sección 5.5

1. Con respecto al ejemplo de esta sección, procesar con M la cadena de entrada $w = baabbbaa$ y luego derivar w en la gramática G, simulando dicho procesamiento.

2. Modificar el AFPN presentado en el último ejemplo de la sección 5.2 para que acepte por pila vacía el lenguaje $L = \{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$. Aplicar luego la construcción del Teorema 5.5.1 para encontrar una gramática cuyo lenguaje generado sea L.