2.7. Equivalencia computacional entre los AFN-$\boldsymbol{\lambda}$ y los AFN

En esta sección se mostrará que el modelo AFN-λ es computacionalmente equivalente al modelo AFN. O dicho más gráficamente, las transiciones λ se pueden eliminar, añadiendo transiciones que las simulen, sin alterar el lenguaje aceptado.

En primer lugar, un AFN $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \Delta)$ puede ser considerado como un AFN-λ en el que, simplemente, hay *cero* transiciones λ. Para la afirmación recíproca tenemos el siguiente teorema:

2.7.1 Teorema. *Dado un AFN-λ $M = (\Sigma, Q, q_0, F, \Delta)$, se puede construir un AFN M' equivalente a M, es decir, tal que $L(M) = L(M')$.*

Bosquejo de la demostración. Para construir M' a partir de M se requiere la noción de **$\boldsymbol{\lambda}$-clausura de un estado**. Para un estado $q \in Q$, la λ-clausura de q, notada $\lambda[q]$, es el conjunto de estados de M a los que se puede llegar desde q por 0, 1 o más transiciones λ. Nótese que, en general, $\lambda[q] \neq \Delta(q, \lambda)$. Por definición, $q \in \lambda[q]$. La λ-clausura de un conjunto de estados $\{q_1, \dots, q_k\}$ se define por:

$$\lambda[\{q_1, \dots, q_k\}] := \lambda[q_1] \cup \cdots \cup \lambda[q_k].$$

Además, $\lambda[\varnothing] := \varnothing$. Sea $M' = (\Sigma, Q, q_0, F', \Delta')$ donde

$$\begin{array}{rcl} \Delta' : Q \times \Sigma & \longrightarrow & \wp(Q) \\ (q, a) & \longmapsto & \Delta'(q, a) := \lambda\big[\Delta(\lambda[q], a)\big]. \end{array}$$

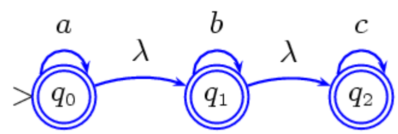
M' simula así las transiciones λ de M teniendo en cuenta todas las posibles trayectorias. F' se define como:

$$F' = \{q \in Q : \lambda[q] \text{ contiene al menos un estado de aceptación}\}.$$

Es decir, los estados de aceptación de M' incluyen los estados de aceptación de M y aquellos estados desde los cuales se puede llegar a un estado de aceptación por medio de una o más transiciones λ. $\square$

Como se puede apreciar, la construcción de M' a partir de M es puramente algorítmica.

Ejemplo Vamos a ilustrar el anterior algoritmo con el AFN-λ M, presentado en el segundo ejemplo de la sección 2.6.



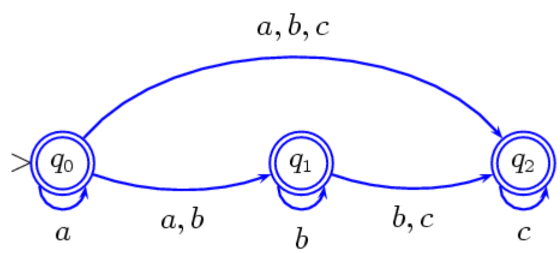
$L(M) = a^*b^*c^*$. Las λ-clausuras de los estados vienen dadas por:

$$\begin{array}{rcl} \lambda[q_0] & = & \{q_0, q_1, q_2\}. \\ \lambda[q_1] & = & \{q_1, q_2\}. \\ \lambda[q_2] & = & \{q_2\}. \end{array}$$

La función de transición $\Delta' : Q \times \{a, b, c\} \to \wp(\{q_0, q_1, q_2\})$ es:

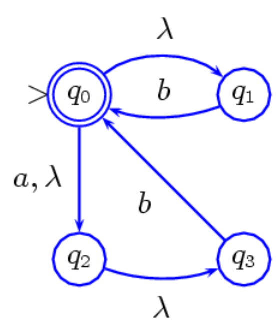
$$\begin{array}{rcl} \Delta'(q_0, a) & = & \lambda\,[\Delta(\lambda[q_0], a)] = \lambda\,[\Delta(\{q_0, q_1, q_2\}, a)] = \lambda[\{q_0\}] = \{q_0, q_1, q_2\}. \\ \Delta'(q_0, b) & = & \lambda\,[\Delta(\lambda[q_0], b)] = \lambda\,[\Delta(\{q_0, q_1, q_2\}, b)] = \lambda[\{q_1\}] = \{q_1, q_2\}. \\ \Delta'(q_0, c) & = & \lambda\,[\Delta(\lambda[q_0], c)] = \lambda\,[\Delta(\{q_0, q_1, q_2\}, c)] = \lambda[\{q_2\}] = \{q_2\}. \\ \Delta'(q_1, a) & = & \lambda\,[\Delta(\lambda[q_1], a)] = \lambda\,[\Delta(\{q_1, q_2\}, a)] = \lambda[\varnothing] = \varnothing. \\ \Delta'(q_1, b) & = & \lambda\,[\Delta(\lambda[q_1], b)] = \lambda\,[\Delta(\{q_1, q_2\}, b)] = \lambda[\{q_1\}] = \{q_1, q_2\}. \\ \Delta'(q_1, c) & = & \lambda\,[\Delta(\lambda[q_1], c)] = \lambda\,[\Delta(\{q_1, q_2\}, c)] = \lambda[\{q_2\}] = \{q_2\}. \\ \Delta'(q_2, a) & = & \lambda\,[\Delta(\lambda[q_2], a)] = \lambda\,[\Delta(\{q_2\}, a)] = \lambda[\varnothing] = \varnothing. \\ \Delta'(q_2, b) & = & \lambda\,[\Delta(\lambda[q_2], b)] = \lambda\,[\Delta(\{q_2\}, b)] = \lambda[\varnothing] = \varnothing. \\ \Delta'(q_2, c) & = & \lambda\,[\Delta(\lambda[q_2], c)] = \lambda\,[\Delta(\{q_2\}, c)] = \lambda[\{q_2\}] = \{q_2\}. \end{array}$$

El autómata M' así obtenido es el siguiente:



Ejercicios Construir AFN equivalentes a los siguientes AFN-λ:

1.



2.