1.11. La clausura de Kleene de un lenguaje

La **clausura de Kleene** o **estrella de Kleene** de un lenguaje A, $A \subseteq \Sigma^*$, es la unión de todas las potencias de A y se denota por A^*.

$$\boxed{A^* = \bigcup_{i \geq 0} A^i = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \cdots \cup A^n \cdots} \qquad \text{(Descripción 1)}$$

A^* se puede describir de la siguiente manera

$$\boxed{\begin{array}{rcl} A^* & = & \text{conjunto de } \textit{todas} \text{ las concatenaciones} \\ & & \text{de palabras de } A \text{, incluyendo } \lambda \\ & = & \{u_1 \cdots u_n : \quad u_i \in A, \quad n \geq 0\} \end{array}} \qquad \text{(Descripción 2)}$$

De manera similar se define la **clausura positiva** de un lenguaje A, $A \subseteq \Sigma^*$, la cual se denota por A^+.

$$\boxed{A^+ = \bigcup_{i \geq 1} A^i = A^1 \cup A^2 \cup \cdots \cup A^n \cdots}$$

A^+ se puede describir de la siguiente manera

$$\boxed{\begin{array}{rcl} A^+ & = & \text{conjunto de } \textit{todas} \text{ las concatenaciones de palabras de } A, \\ & = & \{u_1 \cdots u_n : \quad u_i \in A, \quad n \geq 1\} \end{array}}$$

Obsérvese que $A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$ y que $A^* = A^+$ si y solamente si $\lambda \in A$.

Propiedades. Sea A un lenguaje sobre Σ, $(A \subseteq \Sigma^*)$.

1. $A^+ = A^* \cdot A = A \cdot A^*$
2. $A^* \cdot A^* = A^*$
3. $\left(A^*\right)^n = A^*$, para todo $n \geq 1$.
4. $\left(A^*\right)^* = A^*$.
5. $A^+ \cdot A^+ \subseteq A^+$.
6. $\left(A^*\right)^+ = A^*$.
7. $\left(A^+\right)^* = A^*$.
8. $\left(A^+\right)^+ = A^+$.

Demostración:

1. $$\begin{aligned} A \cdot A^* &= A \cdot (A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \cdots) \\ &= A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \cdots \\ &= A^+. \end{aligned}$$

   Similarmente se demuestra que $A^* \cdot A = A^+$.

2. Si $x \in A^* \cdot A^*$, entonces $x = u \cdot v$, con $u \in A^*$, $v \in A^*$. Entonces, $x = u \cdot v$, con $u = u_1 u_2 \cdots u_n, \quad u_i \in A, \quad n \geq 0$ y $v = v_1 v_2 \cdots v_m, \quad v_i \in A, \quad m \geq 0$.

   De donde
   $$x = u \cdot v = u_1 \cdot u_2 \cdots u_n \cdot v_1 \cdot v_2 \cdots v_m.$$
   con $u_i \in A$, $v_i \in A$, $\quad n \geq 0$. Por lo tanto, x es una concatenación de $n+m$ palabras de A. Así que $x \in A^*$.

   Recíprocamente, si $x \in A^*$, entonces $x = x \cdot \lambda \in A^* \cdot A^*$.

   Esto prueba la igualdad de los conjuntos $A^* \cdot A^*$ y A^*.

3. Se sigue de la propiedad anterior.

4. $$\begin{aligned} \left(A^*\right)^* &= \left(A^*\right)^0 \cup \left(A^*\right)^1 \cup \left(A^*\right)^2 \cup \cdots \\ &= \{\lambda\} \cup A^* \cup A^* \cup A^* \cup \cdots \\ &= A^*. \end{aligned}$$

5. La demostración de esta propiedad es similar a la de la propiedad 2, pero con la restricción $m, n \geq 1$.

   En general, no se tiene la igualdad $A^+ \cdot A^+ = A^+$; más adelante se mostrará un contraejemplo.

6. $$\begin{aligned} \left(A^*\right)^+ &= \left(A^*\right)^1 \cup \left(A^*\right)^2 \cup \left(A^*\right)^3 \cup \cdots \\ &= A^* \cup A^* \cup A^* \cup \cdots \\ &= A^*. \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} \left(A^+\right)^* &= \left(A^+\right)^0 \cup \left(A^+\right)^1 \cup \left(A^+\right)^2 \cup \cdots \\ &= \{\lambda\} \cup A^+ \cup A^+ A^+ \cup \cdots \\ &= A^* \cup \text{ (conjuntos contenidos en } A^+) \\ &= A^* \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} \left(A^{+}\right)^{+} &= \left(A^{+}\right)^{1} \cup \left(A^{+}\right)^{2} \cup \left(A^{+}\right)^{3} \cup \cdots, \\ &= A^{+} \cup \ (\text{conjuntos contenidos en } A^{+}) \\ &= A^{+} \end{aligned}$$

Contraejemplo de $\boxed{A^{+} \cdot A^{+} = A^{+}}$.

Sea $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{a\}$. Se tiene

$$A^{+} = A^{1} \cup A^{2} \cup \cdots = \{a\} \cup \{aa\} \cup \{aaa\} \cup \cdots = \{a^{n} : n \geq 1\}$$

Por otro lado,

$$A^{+} \cdot A^{+} = \{a, a^{2}, a^{3}, \dots\} \cdot \{a, a^{2}, a^{3}, \dots\} = \{a^{2}, a^{3}, a^{4}, \dots\} = \{a^{n} : n \geq 2\}.$$

Observación: Según las definiciones dadas, Σ^{*} tiene dos significados:

Σ^{*} = conjunto de las palabras sobre el alfabeto Σ.

Σ^{*} = conjunto de todas las concatenaciones de palabras de Σ.

No hay conflicto de notaciones porque las dos definiciones anteriores de Σ^{*} dan lugar al mismo conjunto.

Ejercicio Sean $A, B \subseteq \Sigma^{*}$. Demostrar que

$$(A \cup B)^{*} = (A^{*}B^{*})^{*} \tag{1.1}$$

Ayuda: tener en cuenta tanto la descripción 1 como la descripción 2 presentadas arriba.