

## 4.9. Eliminación de las producciones unitarias

### 4.9.1. Definiciones.

- (i) Una producción de la forma  $A \rightarrow B$  donde  $A$  y  $B$  son variables, se llama **producción unitaria**.
- (ii) El **conjunto unitario** de una variable  $A$  (también llamado **conjunto cadena** de  $A$ ) se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{UNIT}(A) := \{X \in V : \exists \text{ una derivación } A \xRightarrow{*} X \text{ que usa únicamente producciones unitarias}\}.$$

Por definición,  $A \in \mathbf{UNIT}(A)$ .

### 4.9.2. Algoritmo para encontrar las producciones unitarias.

El siguiente algoritmo sirve para encontrar el conjunto unitario  $\mathbf{UNIT}(A)$  de una variable  $A$ .

$$\mathbf{UNIT}_1(A) := \{A\}.$$

$$\mathbf{UNIT}_{i+1}(A) := \mathbf{UNIT}_i(A) \cup \{X \in V : \exists \text{ producción } Y \rightarrow X, Y \in \mathbf{UNIT}_i(A)\}.$$

Para el conjunto de producciones unitarias se tiene que:

$$\mathbf{UNIT}_1(A) \subseteq \mathbf{UNIT}_2(A) \subseteq \mathbf{UNIT}_3(A) \subseteq \dots$$

Puesto que el conjunto de variables es finito, la anterior es una sucesión finita y se tiene

$$\mathbf{UNIT}(A) = \bigcup_{i \geq 1} \mathbf{UNIT}_i(A)$$

El anterior algoritmo se puede representar de la siguiente forma:

INICIALIZAR:  
     $\mathbf{UNIT}(A) := \{A\}$   
REPETIR:  
     $\mathbf{UNIT}(A) := \mathbf{UNIT}(A) \cup \{X \in V : \exists \text{ una producción } Y \rightarrow X \text{ con } Y \in \mathbf{UNIT}(A)\}$   
HASTA:  
    No se añaden nuevas variables  $\mathbf{UNIT}(A)$

**4.9.3 Teorema.** Dada una GIC  $G$ , se puede construir una GIC  $G'$  equivalente a  $G$  sin producciones unitarias.

Demostración: Las producciones unitarias de  $G$  se pueden eliminar añadiendo para cada variable  $A$  de  $G$  las producciones (no unitarias) de las variables contenidas en el conjunto unitario  $\mathbf{UNIT}(A)$ . La gramática  $G'$  así obtenida es equivalente a la gramática original  $G$ .  $\square$

**Ejemplo** Eliminar las producciones unitarias de la siguiente gramática.

$$G : \begin{cases} S \rightarrow AS \mid AA \mid BA \mid \lambda \\ A \rightarrow aA \mid a \\ B \rightarrow bB \mid bC \mid C \\ C \rightarrow aA \mid bA \mid B \mid ab \end{cases}$$

Solución: Aplicando el algoritmo para cada una de las variables de  $G$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{UNIT}_1(S) &= \{S\} \\ \mathbf{UNIT}_2(S) &= \{S\} \cup \{ \} = \{S\} \\ \mathbf{UNIT}_1(A) &= \{A\} \\ \mathbf{UNIT}_2(A) &= \{A\} \cup \{ \} = \{A\} \\ \mathbf{UNIT}_1(B) &= \{B\} \\ \mathbf{UNIT}_2(B) &= \{B\} \cup \{C\} = \{B, C\} \\ \mathbf{UNIT}_3(B) &= \{B, C\} \cup \{B\} = \{B, C\} \\ \mathbf{UNIT}_1(C) &= \{C\} \\ \mathbf{UNIT}_2(C) &= \{C\} \cup \{B\} = \{C, B\} \\ \mathbf{UNIT}_3(C) &= \{C, B\} \cup \{C\} = \{C, B\} \end{aligned}$$

Eliminando las producciones unitarias se obtiene una gramática  $G'$  equivalente:

$$G' : \begin{cases} S \rightarrow AS \mid AA \mid BA \mid \lambda \\ A \rightarrow aA \mid a \\ B \rightarrow bB \mid bC \mid aA \mid bA \mid ab \\ C \rightarrow aA \mid bA \mid ab \mid bB \mid bC \end{cases}$$

**Ejemplo** Eliminar las producciones unitarias de la siguiente gramática.

$$G : \begin{cases} S \rightarrow ACA \mid CA \mid AA \mid A \mid C \mid \lambda \\ A \rightarrow aAa \mid aa \mid B \mid C \\ B \rightarrow cC \mid D \mid C \\ C \rightarrow bC \\ D \rightarrow aA \mid \lambda \end{cases}$$

Solución: Realizando el algoritmo para cada una de las variables de  $G$  se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{UNIT}(S) &= \{S, A, C, B, D\} \\ \mathbf{UNIT}(A) &= \{A, B, C, D\} \\ \mathbf{UNIT}(B) &= \{B, C, D\} \\ \mathbf{UNIT}(C) &= \{C\} \\ \mathbf{UNIT}(D) &= \{D\}\end{aligned}$$

Eliminando las producciones unitarias se obtiene una gramática  $G'$  equivalente:

$$G' : \begin{cases} S \rightarrow ACA \mid CA \mid AA \mid \lambda \mid aAa \mid aa \mid bC \mid cC \mid aA \\ A \rightarrow aAa \mid aa \mid cC \mid bC \mid aA \mid \lambda \\ B \rightarrow cC \mid bC \mid aA \mid \lambda \\ C \rightarrow bC \\ D \rightarrow aA \mid \lambda \end{cases}$$

#### Ejercicios de la sección 4.9

1. Eliminar las producciones unitarias de la siguiente gramática:

$$G : \begin{cases} S \rightarrow Ba \mid A \mid \lambda \\ A \rightarrow Aa \mid a \\ B \rightarrow bB \mid S \end{cases}$$

2. Eliminar las producciones unitarias de la siguiente gramática:

$$G : \begin{cases} S \rightarrow BBa \mid A \mid B \mid ab \mid \lambda \\ A \rightarrow Aa \mid B \mid D \mid aC \\ B \rightarrow bB \mid aA \mid b \\ C \rightarrow ABb \mid A \mid aB \\ D \rightarrow cC \mid c \end{cases}$$

3. Eliminar las producciones unitarias de la siguiente gramática:

$$G : \begin{cases} S \rightarrow ACA \mid ab \mid B \mid CA \mid A \mid C \mid \lambda \\ A \rightarrow aAa \mid B \mid CD \mid aa \mid D \\ B \rightarrow bB \mid bA \mid b \\ C \rightarrow cC \mid c \\ D \rightarrow ABb \mid ac \mid C \mid Bb \end{cases}$$