2.10. Lema de Arden

Vamos a utilizar el siguiente resultado, conocido como "lema de Arden", para demostrar la segunda parte del teorema de Kleene.

2.10.1. *Lema de Arden.* *Si A y B son lenguajes sobre un alfabeto Σ y $\lambda \notin A$, entonces la ecuación $X = AX \cup B$ tiene una única solución dada por $X = A^*B$.*

Demostración: Si X es una solución de $X = AX \cup B$, entonces $B \subseteq AX \cup B = X$. También se tiene $AX \subseteq X$; a partir de esta contenencia y usando inducción sobre n, se puede demostrar que $A^n X \subseteq X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$A^n B \subseteq A^n X \subseteq X$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Así que

$$A^*B = \left(\bigcup_{n \geq 0} A^n \right) B = \bigcup_{n \geq 0} A^n B \subseteq X.$$

Esto muestra que toda solución de $X = AX \cup B$ contiene a A^*B y es fácil verificar que, de hecho, A^*B es una solución:

$$A(A^*B) \cup B = A^+B \cup B = (A^+ \cup \lambda)B = A^*B.$$

Para la unicidad, demostraremos que si $A^*B \cup C$, con $C \cap A^*B = \varnothing$, es una solución de la ecuación, entonces $C = \varnothing$.

$$\begin{aligned} A^*B \cup C &= A(A^*B \cup C) \cup B \\ &= A^+B \cup AC \cup B \\ &= (A^+ \cup \lambda)B \cup AC \\ &= A^*B \cup AC. \end{aligned}$$

Intersectando con C ambos lados de la anterior igualdad, se tiene:

$$\begin{aligned} (A^*B \cap C) \cup C &= (A^*B \cap C) \cup (AC \cap C), \\ C &= AC \cap C. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $C \subseteq AC$. Si se tuviera $C \neq \varnothing$, existiría una cadena $u \in C$ de longitud mínima. Entonces $u = vw$, con $v \in A$, $w \in C$. Como $\lambda \notin A$, $v \neq \lambda$; por consiguiente $|w| < |u|$. Esta contradicción muestra que necesariamente $C = \varnothing$, tal como se quería. $\square$

Ejemplo La ecuación $X = aX \cup b^*ab$ tiene solución única $X = a^*b^*ab$.

Ejemplo La ecuación $X = a^2X \cup b^+X \cup ab$ se puede escribir en la forma $X = (a^2 \cup b^+)X \cup ab$. Por el lema de Arden la ecuación tiene solución única $X = (a^2 \cup b^+)^*ab$.

Ejemplo La ecuación $X = ab^2X \cup aX \cup a^*b \cup b^*a$ se puede escribir como $X = (ab^2 \cup a)X \cup (a^*b \cup b^*a)$. Por lema de Arden la ecuación tiene solución única $X = (ab^2 \cup a)^*(a^*b \cup b^*a)$.

Ejercicios Encontrar las soluciones (únicas) de las siguientes ecuaciones.

1. $X = aX \cup bX$.
2. $X = aX \cup b^*ab \cup bX \cup a^*$.

Ejercicio Demostrar de si $\lambda \in A$, entonces Y es una solución de la ecuación $X = AX \cup B$ si y solo si $Y = A^*(B \cup D)$ para algún $D \subseteq \Sigma^*$.