1.12. Inverso de un lenguaje

Dado A un lenguaje sobre Σ, se define A^{-1} de la siguiente forma:

$$A^{-1} = \{u^{-1} : u \in A\}.$$

Propiedades. Sean A y B lenguajes sobre Σ (es decir, $A, B \subseteq \Sigma^*$).

1. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
2. $(A \cup B)^{-1} = A^{-1} \cup B^{-1}$.
3. $(A \cap B)^{-1} = A^{-1} \cap B^{-1}$.
4. $(A^{-1})^{-1} = A$.
5. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
6. $(A^+)^{-1} = (A^{-1})^+$.

Demostración:

1. $$\begin{aligned} x \in (A \cdot B)^{-1} &\iff x = u^{-1}, \quad \text{donde } u \in A \cdot B. \\ &\iff x = u^{-1}, \quad \text{donde } u = vw,\ v \in A, w \in B. \\ &\iff x = (vw)^{-1}, \quad \text{donde } v \in A, w \in B. \\ &\iff x = w^{-1}v^{-1}, \quad \text{donde } v \in A, w \in B. \\ &\iff x \in B^{-1} \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

2. $\boxed{\textit{Ejercicio}}$

3. $\boxed{\textit{Ejercicio}}$

4. $\boxed{\textit{Ejercicio}}$

5. $$\begin{aligned} x \in (A^*)^{-1} &\iff x = u^{-1},\ \text{donde } u \in A^*. \\ &\iff x = (u_1 \cdot u_2 \cdots u_n)^{-1},\ \text{donde los } u_i \in A,\ n \geq 0. \\ &\iff x = u_n^{-1} \cdot u_2^{-1} \cdots u_1^{-1},\ \text{donde los } u_i \in A,\ n \geq 0. \\ &\iff x \in (A^{-1})^*. \end{aligned}$$

6. $\boxed{\textit{Ejercicio}}$

$\boxed{\textit{Ejercicio}}$ ¿Se pueden generalizar las propiedades 2 y 3 anteriores para uniones e intersecciones arbitrarias, respectivamente?