Tema II

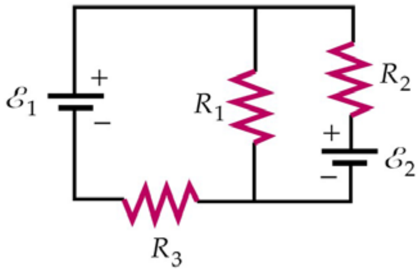
Circuitos eléctricos en corriente continúa

Indice

Introducción a los circuitos resistivos

Consideraremos que una resistencia es cualquier dispositivo que posee una resistencia eléctrica, es decir, impide o dificulta en mayor o menor medida el movimiento de electrones a través del material. La unidad básica de la resistencia es el ohmio (Ω).

Para propósitos del análisis de circuitos, un circuito eléctrico se describe con base en dos características específicas: los elementos que contiene y como se interconectan. Para determinar el voltaje y la corriente resultantes no se requiere nada más.



Un circuito consiste en dos o más elementos que se conectan mediante conductores perfectos. Los conductores perfectos son cables o alambres que permiten el flujo de corriente con resistencia cero. En cuanto a la energía, sólo puede considerarse como acumulada o concentrada en cada elemento del circuito.

Descripción de partes del circuito eléctrico

Rama
Sección que une a un elemento a 2 nodos.

Nodo
Un punto de conexión de dos o más elementos de circuito se denomina nodo junto con todo el cable o alambre de los elementos.

Malla
Conjunto de ramas que describen una trayectoria cerrada.

Ley de Ohm

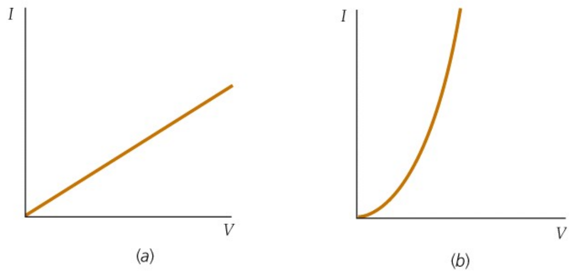
La ley de Ohm postula que el voltaje a través de una resistencia es directamente proporcional a la corriente que pasa por la resistencia. La constante de proporcionalidad es el valor de la resistencia en ohmios ($1\Omega = 1V / A$).

$$v = Ri$$

donde $R \geq 0$.

Puesto que R es una constante, al representar gráficamente voltaje frente a corriente, obtendremos una curva lineal y diremos que la resistencia es lineal. Existen otros tipos de resistencias cuya representación voltaje-intensidad no es lineal y por tanto la resistencia obtenida no es lineal y dificulta en gran medida el análisis del circuito[1].

Aunque en realidad, todas las resistencias prácticas son no lineales debido a diversos factores como temperatura, intensidad. Muchos materiales se aproximan a resistencias lineales en un rango limitado de corrientes y condiciones ambientales y por tanto nos centraremos exclusivamente en este tipo de materiales.

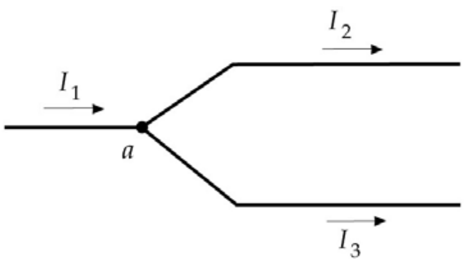


Leyes de Kirchhoff

Ley de corriente de Kirchhoff (LCK)

La suma algebraica de las corrientes que entran por cualquier nodo son cero.

$$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0$$



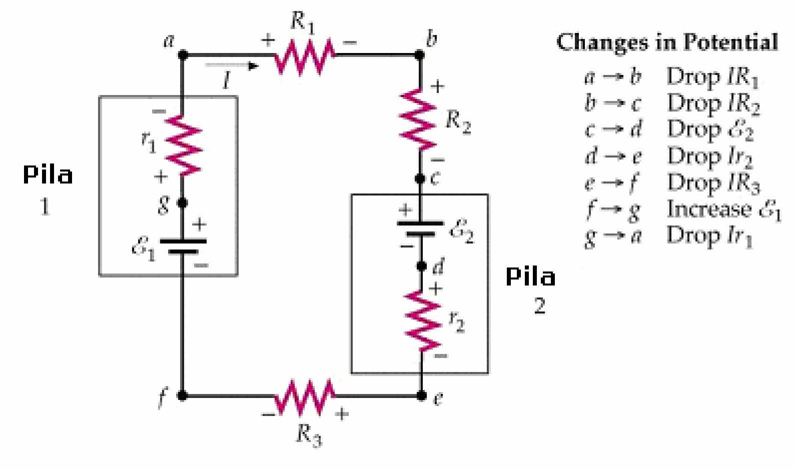
$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

[1] También se les conoce por materiales óhmicos si verifican la ley de Ohm o bien materiales no-óhmicos para aquellos que no la verifican.

Ley de voltajes de Kirchhoff (LVK)

La suma algebraica de los voltajes a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es cero.

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = 0$$



Definiciones adicionales

Potencia instantánea: $p = vi = Ri^2 = \dfrac{v^2}{R}$

Conductancia: $G = \dfrac{1}{R}$ (Siemens o Ω^{-1})

Corto circuito:

Es una resistencia de cero ohmios, en otras palabras, es un conductor perfecto capaz de llevar cualquier cantidad de corriente sin sufrir una caída de voltaje por donde pasa. Dos puntos pueden ser cortocircuitados juntándolos con un cable.

Circuito abierto:

Es una resistencia de conductancia cero siemens, en otras palabras es un perfecto aislante capaz de soportar cualquier voltaje sin permitir que fluya corriente a través de él. Es decir, una resistencia infinita o un cable roto.

Subcircuitos equivalentes

Una estrategia general que vamos a utilizar en el análisis de circuitos eléctricos es la simplificación siempre que sea posible.

Un subcircuito es una parte de un circuito. Un subcircuito contiene un número de elementos interconectados, pero sólo dos terminales accesibles, por lo que es llamado subcircuito de dos terminales. El voltaje que pasa a través y la corriente que entra en esas terminales son llamados voltaje terminal y corriente terminal del subcircuito.

Equivalentes en Serie

Dos elementos contiguos se dicen que están conectados en serie si en su parte de nodo común no tiene otras corrientes que entren en él.

Resistencias

De forma generalizada, si tenemos *N* resistencias conectadas en serie tenemos

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

Fuentes de voltaje

Una cadena de fuentes de voltaje son equivalentes a una simple fuente de voltaje donde la función fuente es la suma algebraica de las funciones fuentes en serie.

$$\xi_{eq} = \sum_{i} \xi_i$$

Fuentes de intensidad

En este caso todas las fuentes de corriente deben ser de igual corriente de modo que $i_s = i_1 = i_2 = ... = i_N$

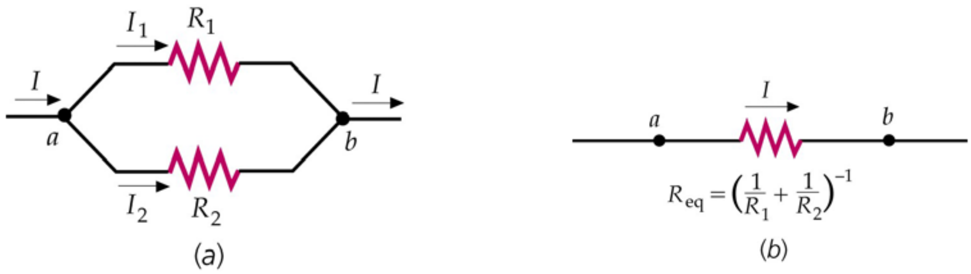
Equivalentes en Paralelo

Dos elementos están conectados en paralelo si forman una malla sin contener otros elementos. Es decir, elementos en paralelo tienen el mismo voltaje que pasa por ellos.

Resistencias

Para un conjunto de N resistencias conectadas en paralelo, es equivalente a una resistencia simple en donde su conductancia es la suma de las conductancias paralelas.

$$G_{eq} = \sum_{i=1}^{N} G_i \qquad\qquad R_{eq}^{-1} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$$



Fuentes de voltaje

En este caso todas las fuentes de voltaje en paralelo deben ser todas ellas iguales y además deben conectarse con igual polaridad: todos los terminales positivos y todos los terminales negativos. $\xi_s = \xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_N$

Fuentes de intensidad

Una serie de fuentes de corriente en paralelo son equivalentes a una fuente de corriente simple donde su función fuente es la suma de las funciones en paralelo.

$$i_s = \sum_i i_{s_i}$$

Equivalentes de Thevenin y Norton

Los equivalentes serie y paralelos descritos hasta el momento son limitaciones de elementos del mismo tipo. En esta sección vamos a desarrollar un par de equivalentes denominados de ***Thevenin*** y ***Norton*** de gran utilidad en la simplificación de cualquier análisis de problemas de circuitos.

Teorema de Thevenin

Una red lineal activa con resistencias que contenga una o más fuentes de voltaje o corriente puede reemplazarse por una única fuente de voltaje y una resistencia en serie.

Teorema Norton

Una red lineal activa con resistencias que contenga una o más fuentes de voltaje o corriente puede reemplazarse por una única fuente de corriente con una resistencia en paralelo.

La forma de Thevenin con una fuente de voltaje v_T y una resistencia en serie R_T es equivalente a la forma de Norton con una fuente de corriente i_N y una resistencia en paralelo R_N, si

a) $R_T = R_N$
b) $v_T = R_N i_N$

Para encontrar la resistencia común $R_T = R_N$ de los sistemas Thevenin y Norton sólo basta "suprimir" las fuentes internas independientes (cortocircuitar las fuentes) y calcular la resistencia equivalente del sistema.

Para determinar el valor v_T sólo necesitamos determinar el voltaje existente entre los terminales del sistema en circuito abierto. Y para i_N podemos obtener su valor a partir del equivalente Thevenin.

Teorema de la máxima transferencia de potencia

En muchas ocasiones nos interesa saber cuáles son las mejores condiciones que deben reunir el dispositivo que suministra potencia y el que la recibe para que se transfiera la máxima potencia del generador al receptor.

Supongamos que tenemos un equivalente Thevenin representante de un circuito eléctrico (V_T, R_T) y unimos a los bordes de este dispositivo una resistencia de carga R a los terminales correspondientes. Tenemos que

$$P = V_{ab} I = I^2 R = R\left(\frac{V_T}{R+R_T}\right)^2 = V_T^2 \frac{R}{\left(R+R_T\right)^2}$$

Para obtener la expresión para que se transfiera la máxima potencia debemos derivar la expresión anterior con respecto a R (nuestra variable) e igualar a cero.

$$\frac{dP}{dR} = V_T^2 \frac{R_T - R}{\left(R+R_T\right)^2} = 0 \Rightarrow R = R_T$$

Métodos de análisis en circuitos eléctricos CC

En este apartado nos centraremos en el análisis de circuitos mediante métodos sistemáticos que nos permitan resolver completamente cualquier circuito lineal[2].

Consideraremos dos métodos generales; el primero se basa en la ley de voltajes de Kirchhoff (*LVK*) denominado resolución por mallas, y el segundo se basa en la ley de corriente de Kirchhoff (*LCK*) conocido por el nombre de resolución por nodos.

---

[2] Un circuito es lineal cuando sólo contiene elementos lineales y fuentes independientes.

Pero primeramente veremos como pueden usarse los principios de proporcionalidad y superposición para dividir un problema de circuitos lineales que involucran varias fuentes, en problemas de componentes, donde cada uno involucra una sola variable, o una sola fuente.

Para una completa formación es necesario ejercitar con numerosos ejemplos los conocimientos expuestos en el presente capítulo.

Principio de Proporcionalidad

Cualquier circuito lineal verifica el principio de proporcionalidad. Esto es, si x e y son variables de circuito asociadas con un elemento de dos terminales, entonces diremos que el elemento es lineal si multiplicar x por una variable K es igual a la multiplicación de y por la misma constante K. Este principio sólo es aplicable en circuitos lineales.

Principio de Superposición

La respuesta general de un circuito lineal que contiene varias fuentes independientes es la suma de las respuestas a cada fuente individual, eliminando las otras fuentes. En general, este principio sólo es válido para circuitos lineales.

Las fuentes de corriente se eliminan o son fijadas en cero, es decir, se reemplazan por circuitos abiertos, mientras que las fuentes de voltaje se reemplazaran por corto-circuitos.

Método de Mallas

El análisis de malla consiste en escribir las ecuaciones LVK alrededor de cada malla en el circuito, utilizando como incógnita las corrientes de malla. Las n ecuaciones simultáneas de un circuito con n mallas pueden ser escritas en forma de matriz. La ecuación de matriz resultante puede resolverse por varias técnicas. Una de ellas es el método de determinantes o regla de Cramer[3].

Los elementos de las matrices pueden indicarse en forma general de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \cdots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \cdots & R_{2N} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \cdots & R_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{N1} & R_{N2} & R_{N3} & \cdots & R_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}$$

[3] Consultar una bibliografía adecuada

R_{ii} representa la suma de todas las resistencias a través de las cuales pasa la corriente I_i de malla, o dicho de otra manera, la suma de todas las resistencias que pertenecen a la malla i.

R_{ij} representa la suma de todas las resistencias a través de las cuales pasan las corrientes de malla I_i e I_j. El signo de R_{ij} es $+$ si las corrientes están en la misma dirección a través de cada resistencia, y el signo de R_{ij} es $-$ si están en direcciones opuestas. Debemos hacer hincapié en que la matriz de resistencias es simétrica, es decir $R_{ij} = R_{ji}$.

La matriz o vector de corriente no requiere explicación. Estas son las incógnitas en el método que se está describiendo.

La matriz o vector de voltajes tenemos que V_i es la suma algebraica de todas las fuentes que pertenecen a la malla i usando el criterio de la señal pasiva.

Método de Nodos

Es un método general de análisis de circuitos en donde los voltajes son las incógnitas que deben obtenerse. En general, una elección conveniente para el voltaje es el conjunto de voltajes de nodo. Puesto que un voltaje se define como el existente entre dos nodos, es conveniente seleccionar el nodo en la red que sea nodo de referencia, y luego asociar un voltaje a cada uno de los demás nodos.

Comúnmente se elige como nodo de referencia al nodo al que se conecta la mayor cantidad de ramas.

Las ecuaciones del análisis nodal se obtienen aplicando LCK en los nodos salvo el de referencia. De forma matricial podemos plantear el sistema de ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & \cdots & -G_{1N} \\ -G_{12} & G_{22} & \cdots & -G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -G_{1N} & -G_{2N} & & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \vdots \\ \chi_N \end{bmatrix}$$

G_{ii} contiene la recíproca de todas las resistencias conectadas al nodo i.

G_{ij} representa la recíproca (o inversa) de todas las resistencias de las ramas que unen al nodo i y al nodo j.

La matriz o vector de voltajes de nodo no requiere explicación. Estas son las incógnitas en el método que se está describiendo.

Los elementos χ_i del vector de la derecha representan las corrientes de impulsión. Es decir, χ_i será la suma algebraica de las corrientes impulsoras que estén relacionadas con el nodo i.

Las corrientes impulsoras son aquellas ramas que presenten fuentes de intensidad o bien ramas con fuentes de voltaje y resistencia asociada a dicha rama ($I_i = V_i / R_i$) de forma que tomaremos valor positivo si la corriente llega al nodo correspondiente y daremos un valor negativo en caso contrario.