Introducción

- Redes de comunicaciones.
- Redes de transporte.
- Redes de distribución.
- Redes eléctricas.
- Redes de ordenadores, etc.

- Localización.
- Caminos óptimos.
- Emparejamiento.
- Asignación y transporte.
- Circuitos eulerianos y hamiltonianos.
- Análisis de flujo en redes, etc.

Notación y definiciones preliminares

- Un ***grafo*** $G=(V, E)$ viene definido por un conjunto V de ***vértices*** (o ***nodos***) y un conjunto E de ***aristas*** que unen pares de vértices (i, j). Los vértices se representarán gráficamente mediante un punto o círculo y las aristas mediante una línea o arco entre dos vértices.
- Definimos $N=|V|$ (ó n) como el número de vértices, de forma que los vértices vienen numerados desde $k=1,...,N$. Asimismo, se define el número de aristas $M=|E|$ (ó m).
- Para cada arista $e=(i, j)$, se dice que i es el ***vértice inicial*** y j es el ***vértice final***.
- Una arista en la que coinciden el vértice inicial y el final se denomina ***lazo***.
- Un grafo es ***no dirigido*** si el par de vértices asociados a una arista es un par no ordenado, es decir, no importa la dirección de la arista. Gráficamente se representará mediante una simple línea entre los dos vértices.
- Un grafo se dice ***simple*** si no posee lazos y no existe más de una arista entre dos vértices cualesquiera.
- Un ***multigrafo*** es un grafo no dirigido en el que pueden haber más de una arista entre dos vértices.
- Un grafo se dice que es ***dirigido*** (también denominado ***digrafo***) si el par de vértices (i, j) asociado a cada arista e es un par ordenado. Dicho orden se indica gráficamente mediante una flecha en el extremo de la arista que toca al vértice final. En este caso, las aristas se denominan ***arcos***.
- Un ***p–grafo*** es un grafo en el que no existen más de p arcos entre dos vértices cualesquiera.
- Si (i, j) es una arista de un digrafo G, decimos que dicho arco es ***incidente desde*** o ***parte*** del vértice i, y que es ***incidente a*** o ***llega*** al vértice j. Si el grafo G es no dirigido decimos que la arista (i, j) es ***incidente a*** i y j.

- Si (i, j) es una arista en un digrafo G decimos que el vértice i es ***adyacente*** al vértice j. Cuando el grafo es no dirigido, la relación de adyacencia es simétrica. Cuando es dirigido, la relación no es necesariamente simétrica.
- Dado un grafo $G=(V, E)$, se dice que un vértice j es ***sucesor*** de otro vértice i si la arista $(i, j)\in E$. El conjunto de todos los sucesores del vértice i se denota por $\Gamma^{+}(i)$.
- De igual forma, un vértice i se dice que es ***predecesor*** de otro vértice j si $(i, j)\in E$. El conjunto de todos los predecesores de un vértice i se denota por $\Gamma^{-}(i)$.
- Un vértice que es predecesor o sucesor de un vértice i se denomina ***vecino*** de i. El conjunto de todos los vecinos de un vértice i se denota $\Gamma(i)$. Es evidente que $\Gamma(i)=\Gamma^{+}(i)\cup\Gamma^{-}(i)$.
- Para grafos dirigidos, el ***grado de entrada*** de un vértice, denotado por $d^{-}(i)$ es el número de arcos incidentes al vértice i. Por otro lado, el ***grado de salida***, $d^{+}(i)$, es el número de arcos incidentes desde el vértice i. El ***grado*** de un vértice i se define como:

$$d(i) = d^{+}(i) + d^{-}(i)$$

- Normalmente se denota el ***mínimo grado de entrada*** y el ***mínimo grado de salida*** como δ^{-} y δ^{+} respectivamente. De igual forma Δ^{-} y Δ^{+} denotan, respectivamente, el ***máximo grado de entrada*** y el ***máximo grado de salida***.
- En un digrafo, se cumple $\sum_{i=1}^{N} d^{-}(i) = \sum_{i=1}^{N} d^{+}(i) = M$.
- En un grafo no dirigido G, la ***suma de grados*** de los vértices es igual a $2M$.
- En un grafo no dirigido G, ***el número de vértices de grado impar es par***.
- Un grafo se dice que es ***simétrico*** cuando, para todos los pares de vértices (i, j), existen tantos arcos de la forma (i, j) como arcos de la forma (j, i).
- De forma análoga, un 1–grafo (un grafo en el que no existe más de un arco (i, j) entre dos vértices i y j) se denomina ***antisimétrico*** si para cada arco de la forma (i, j) no existe el arco (j, i).
- Un grafo $G=(V, E)$ se dice ***completo*** si cada par de vértices es adyacente. Un grafo simple y completo con N vértices se denota por K_N.
- Un grafo se denomina ***regular*** si todos sus vértices tienen el mismo grado. Si este grado es igual a k, el grafo se llama ***k–regular***. Por ejemplo, un grafo completo con N vértices es $(N–1)$–regular.

- Sobre un conjunto de vértices V se puede realizar una ***partición*** en subconjuntos $V_1,...,V_p$ si se cumple:

$$V_1 \quad V_2 \qquad V_p = V$$
$$V_r \quad V_s = \varnothing, \quad \forall r, s, r \neq s$$

- Un grafo $G=(V, E)$ se denomina ***bipartito*** si el conjunto de vértices V se puede partir en dos subconjuntos V_1 y V_2 tal que para cada arista $(i, j) \in E$ se cumple:

$$i \in V_1 \Rightarrow j \in V_2$$
$$i \in V_2 \Rightarrow j \in V_1$$

- Si para cada vértice $i \in V_1$ y $j \in V_2$ existe una arista (i, j), entonces el grafo G se denomina ***grafo bipartito completo***, y se denota por $K_{p,q}$, donde $p=|V_1|$ y $q=|V_2|$.
- De forma más general, un grafo $G=(V, E)$ es ***k–partito*** si es posible partir el conjunto V en k subconjuntos $V_1,...,V_k$ tal que cada arista de G tiene un vértice en algún V_r y el otro vértice en algún V_s, $r \neq s$.
- Decimos que un grafo $H=(U, F)$ es un ***subgrafo*** de $G=(V, E)$ si $U \subseteq V$ y $F \subseteq E$.
- Dado un conjunto $U \subseteq V$ llamaremos ***subgrafo inducido*** o generado por ese subconjunto de vértices U a un grafo $G_U=(U, E_U)$ cuyos vértices son los elementos de U y cuyos arcos (aristas) son los arcos (aristas) de G que tienen su origen y final en U. Es decir:

$$E_U = \{(i, j) \in E : i, j \in U\}$$

- Un grafo $G'=(V', E')$ es un ***subgrafo generador*** de un grafo $G=(V, E)$ si $V'=V$ y $E' \subseteq E$.
- Sobre un grafo $G=(V, E)$ se define un ***grafo parcial*** generado por un subconjunto de arcos (aristas) $A \subset E$ a un grafo $P=(V, A)$ con el mismo conjunto de vértices V y cuyos arcos (aristas) son los del conjunto A.
- Dado un grafo $G=(V, E)$, un subconjunto de vértices $U \subset V$ y un subconjunto de arcos (aristas) $A \subset E$, el ***subgrafo parcial*** generado por U y A es el grafo parcial de G_U, generado por A.
- Dado un grafo $G=(V, E)$, llamaremos ***grafo complementario*** $\overline{G}=(V, \overline{E})$ a un grafo que tiene el mismo conjunto de vértices que G, y cuyos arcos (o aristas) son los complementarios de E, esto es:

$$\overline{E} = \{(i, j) \in V \times V : (i, j) \notin V\}$$

- Asimismo, se define el ***grafo inverso*** $G'=(V, E')$ a un grafo que cumple:

$$E' = \{(i,j) \in V \times V : (j,i) \in E\}$$

- Dos grafos G=(V, E) y H=(U, D) son ***isomorfos*** si existe un función biyectiva $f: V \to U$ tal:

  $$(i,j) \in E \Leftrightarrow (f(i), f(j)) \in D$$

  En otras palabras, podemos re-etiquetar los vértices de G para que se conviertan en los vértices de H, manteniendo los correspondientes vértices de G y H.

- Una ***cadena*** de longitud q es una secuencia de q arcos (aristas) $C=\{e_1,...,e_q\}$, tal que un arco (arista) e_r de la secuencia ($2 \le r \le q-1$) tienen un extremo común con el arco (arista) e_{r-1} ($e_{r-1} \neq e_r$) y otro extremo común con el arco (arista) e_{r+1} ($e_{r+1} \neq e_r$). El primer vértice del primer arco (arista) y el último vértice del último arco (arista) se denominan los ***extremos*** de la cadena.
- Una ***cadena simple*** es una cadena que no atraviesa una arista cualquiera más de una vez. Una ***cadena elemental*** es una cadena que no atraviesa ningún vértice más de una vez. O, de otro modo, una cadena en la que sus vértices no tienen grado mayor que 2. Toda cadena elemental es simple.
- Un ***ciclo*** es una cadena en la que en la que sus extremos coinciden.
- Un grafo se dice ***acíclico*** si no contiene ciclos.
- Un ***camino*** de longitud q es una secuencia de q arcos orientados $P=\{e_1,...,e_q\}$ con:

  $$e_1=(i_1, i_2) \qquad e_2=(i_2, i_3) \qquad ... \qquad e_q=(i_q, i_{q+1})$$

- El vértice i_1 se denomina ***vértice inicial*** y el vértice i_{q+1} ***vértice final***.
- Un ***camino simple*** es el que no atraviesa ningún arco del grafo más de una vez. Un ***camino elemental*** es un camino en el que no se repite ningún vértice. También se puede definir como un camino en el que sus vértices no tienen grado mayor que 2. Es evidente que un cada camino elemental también es simple.
- Un ***subcamino*** de un camino $P=\{e_1,...,e_q\}$ de longitud q es una subsecuencia contigua de sus arcos. Esto es, para cualquier $1 \le r \le s \le q$, la subsecuencia de arcos $S=\{e_s,...,e_r\}$ es un subcamino de P.
- Un ***circuito*** es un camino que contiene al menos un arco y en el que los vértices inicial y final coinciden. Un circuito es ***elemental*** si todos sus vértices tienen grado 2.

- Un ***corte*** es una partición del conjunto de vértices V en dos partes, U y $\overline{U}=V-U$. Cada corte define un conjunto de arcos compuesto por aquellos arcos que tienen su extremo en U y otro en $\overline{U}$.
- Se dice que un grafo es ***conexo*** si entre cada par de vértices i y j existe una cadena que los une. Un digrafo es ***fuertemente conexo*** si para cada par de vértices i y j existe un camino. Un digrafo es ***débilmente conexo*** si entre cada par de vértices i y j del grafo no dirigido asociado existe una cadena que los une. Cuando el grafo no es conexo, éste puede descomponerse en varios subgrafos que mantienen la conexión, y donde cada uno se denomina ***componente conexa*** del grafo.
- Un ***árbol*** es un grafo conexo y sin ciclos. Un ***bosque*** es un grafo cuyas componentes son árboles. Si $T=(V_T, E_T)$ es un árbol, se cumple:
  a) Dado un par cualquiera de vértices $i, j \in V_T$, existe solamente un camino que los une.
  b) Para cualquier posible arista $e \notin E_T$, la inclusión de esta arista en el árbol T forma exactamente un ciclo.
  c) Un árbol T con N vértices tiene exactamente $N-1$ aristas.
- Un ***árbol generador*** de un grafo no dirigido y conexo es un subgrafo G que cumple la propiedad de ser árbol y contiene a cada vértice de G. El ***peso de un árbol generador T*** en un grafo conexo es la suma de los pesos de todas las aristas de T. En general, un grafo conexo tiene muchos árboles generadores, por lo que a veces es interesante encontrar, de entre todos los árboles generadores, aquel con peso mínimo. Dicho árbol se denomina ***árbol generador mínimo*** (*Minimum Spanning Tree*, *MST*).