

Tema 2

Señales y espectros.

El estudio de las señales y sus espectros es un aspecto fundamental en el campo de las comunicaciones. Una señal se define como cualquier signo, gesto, marca, etcétera, que sirve para comunicar algún tipo de información. Por lo tanto, el significado de señal, aplicado a las comunicaciones electrónicas, implica que alguna cantidad eléctrica, por ejemplo un voltaje o una corriente, posea alguna característica que varíe en el tiempo, como la amplitud o la intensidad, y que lo haga de forma impredecible. Para nuestros propósitos, una señal la podemos definir como una función univaluada del tiempo, es decir, aquella a la que en cada instante de tiempo (variable independiente) le corresponde un único valor de la magnitud variable (variable dependiente).

2.1. CLASIFICACIÓN DE LAS SEÑALES

2.1.1. Señales periódicas y no periódicas.

Una señal **periódica** es la que se repite exactamente después de un intervalo de tiempo fijo. Es decir, una señal $f(t)$ se dice que es periódica en el tiempo si existe una constante $T > 0$ tal que:

$$f(t) = f(t + T) \quad \text{para} \quad -\infty < t < \infty \quad (2.1)$$

donde t es el tiempo. El menor valor de T que satisface esa condición se llama período de $f(t)$ y se define como la duración de un ciclo completo de $f(t)$.

Una señal para la que no existe un valor que satisfaga la relación anterior se dice que es una señal **no periódica**. Un ejemplo de una señal periódica y una no-periódica se muestran en la Figura 2.1. Podemos observar que en la Figura 2.1.a se repite la señal cada intervalo de tiempo T , sin embargo, en la de la Figura 2.1.b no es posible encontrar un tiempo finito para el que se repita la señal, al menos en el intervalo mostrado.

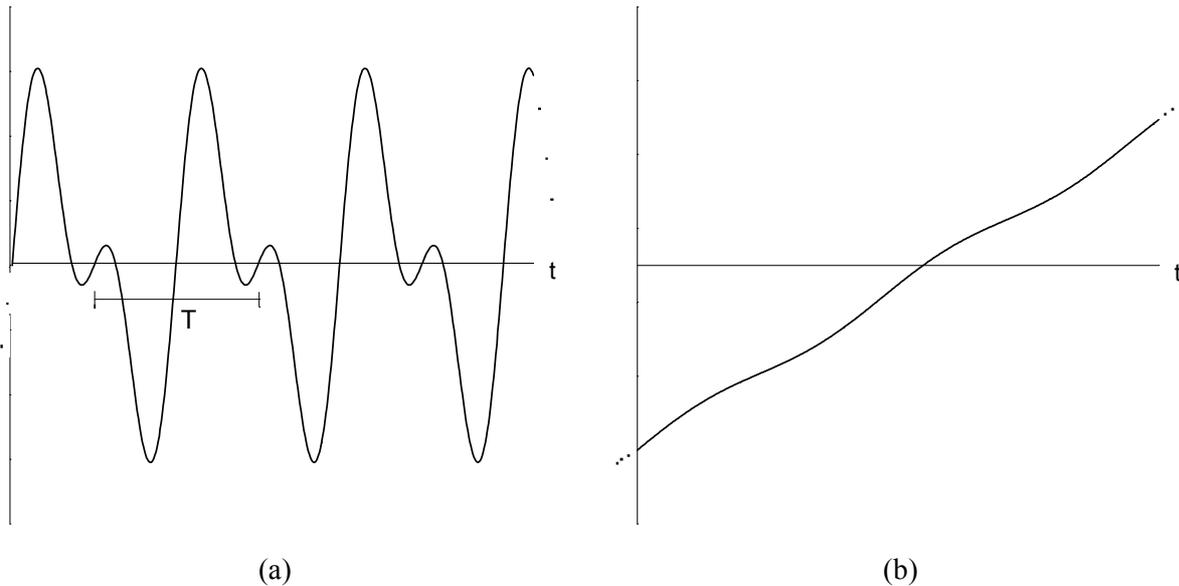


Figura 2.1. Ejemplos de señales periódicas (a) y no periódicas (b)

2.1.2. Señales aleatorias y deterministas.

Una señal puede clasificarse como **determinista** si no existe incertidumbre con respecto a su valor en cualquier instante de tiempo y como **aleatoria** si existe algún grado de incertidumbre antes de que la señal realmente ocurra. Las señales deterministas pueden ser modeladas, en la mayor parte de las ocasiones, mediante expresiones matemáticas explícitas, de la forma $f(t) = \dots$. Para una señal aleatoria no es posible escribir tal expresión explícita, sin embargo, si una señal aleatoria es observada durante el tiempo suficiente el proceso aleatorio que la origina puede mostrar ciertas regularidades que podrían ser descritas en términos de probabilidades y medias estadísticas. Un modelo de este tipo es particularmente útil para caracterizar señales y ruido en los sistemas de comunicaciones. Ejemplos de una señal determinista y una aleatoria se muestran en la Figura 2.2.

2.1.3. Señales analógicas y discretas.

Una señal **analógica**, $f(t)$, es una función continua en el tiempo, esto es, que está definida de forma unívoca para todo t . Por el contrario, una señal **discreta**, $f(kT_0)$, es aquella que existe sólo a tiempos discretos. En este caso se caracteriza por una secuencia de valores definidos en cada intervalo de tiempo, kT_0 , donde k es un entero y T_0 es un intervalo de tiempo fijo. Estas definiciones se ejemplifican en la Figura 2.3.

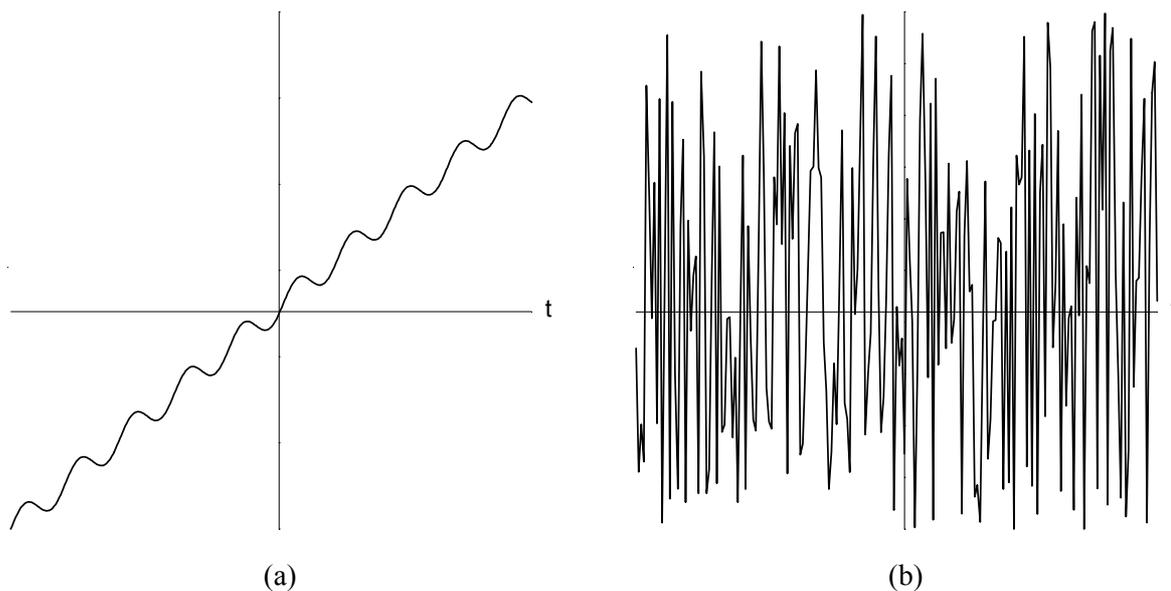


Figura 2.2. Ejemplos de señales determinista $f(x)=0.5t*0.8\text{sen}(1.2t)$ (a) y no determinista (b)

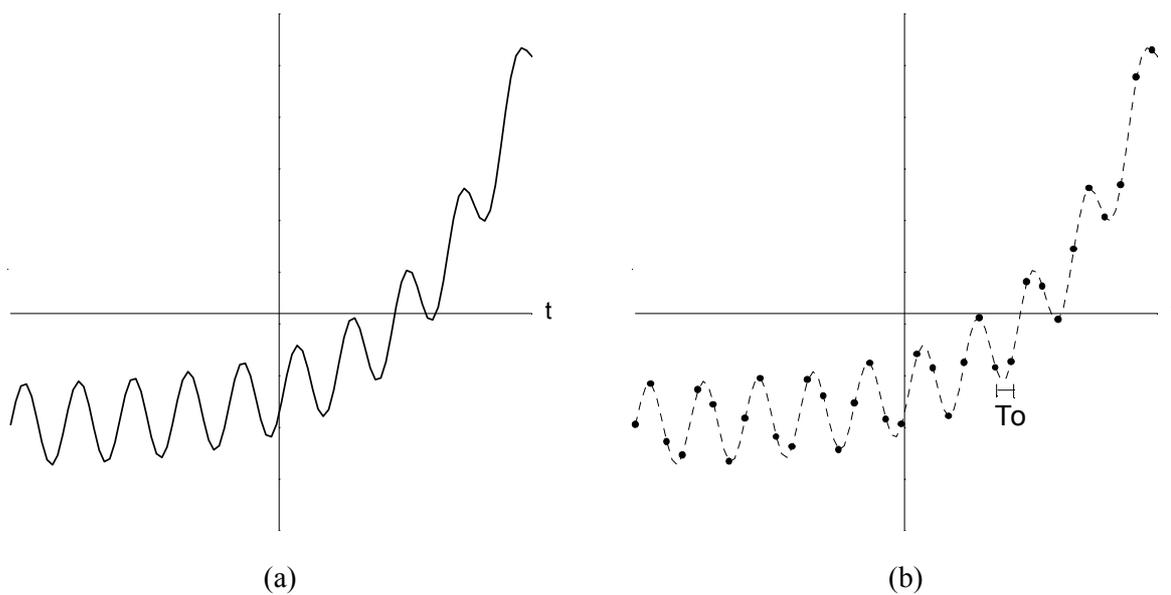


Figura 2.3. Ejemplos de señales continua (a) y no continua (b)

2.1.4. Señales de energía y de potencia.

Una señal eléctrica puede ser representada como un voltaje, $v(t)$, o una corriente, $i(t)$. La potencia instantánea disipada por una tensión en una resistencia R es:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= i(t) \times R \\
 &\downarrow \\
 p(t) &= i(t) \times v(t) = \frac{v^2(t)}{R} \quad [\text{wattios}]
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

y para una corriente

$$p(t) = i(t) \times v(t) = i^2(t) \times R \quad [\text{wattios}] \tag{2.3}$$

Sin embargo, en los sistemas de comunicaciones, la potencia es a menudo normalizada asumiendo que $R=1\Omega$. De esta forma, las dos ecuaciones anteriores normalizadas muestran que la potencia es proporcional al cuadrado de la señal. Por lo tanto, la potencia instantánea asociada con la señal $f(t)$ sería:

$$p(t) = f^2(t) \quad [\text{wattios}] \tag{2.4}$$

donde $f(t)$ puede ser tanto un voltaje como una corriente.

De acuerdo con esto, la energía disipada durante un intervalo de tiempo (t_1, t_2) por una señal real (no compleja) $f(t)$ sería:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt \quad [\text{julios}] \tag{2.5}$$

Y la potencia media disipada en ese intervalo de tiempo:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt \quad [\text{wattios}] \tag{2.6}$$

Teniendo esto en cuenta, podemos clasificar $f(t)$ como una **señal de energía** si, y sólo si, se tiene una energía distinta de cero pero finita ($0 < E < \infty$) para todo tiempo, donde, en este caso:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad [\text{julios}] \tag{2.7}$$

Por lo tanto, una señal de energía es una señal que sólo existe durante un intervalo finito de tiempo o que tiene la mayor parte de su energía concentrada en dicho intervalo. En el mundo real todas las señales que se transmiten tienen, por supuesto, energía finita. Sin embargo, con el fin de poder tratar señales, como las periódicas, definidas para todo tiempo, se definen las señales de potencia. Una **señal de potencia** es aquella que posee una potencia media finita pero distinta de cero ($0 < P < \infty$) para todo tiempo, donde, en este caso:

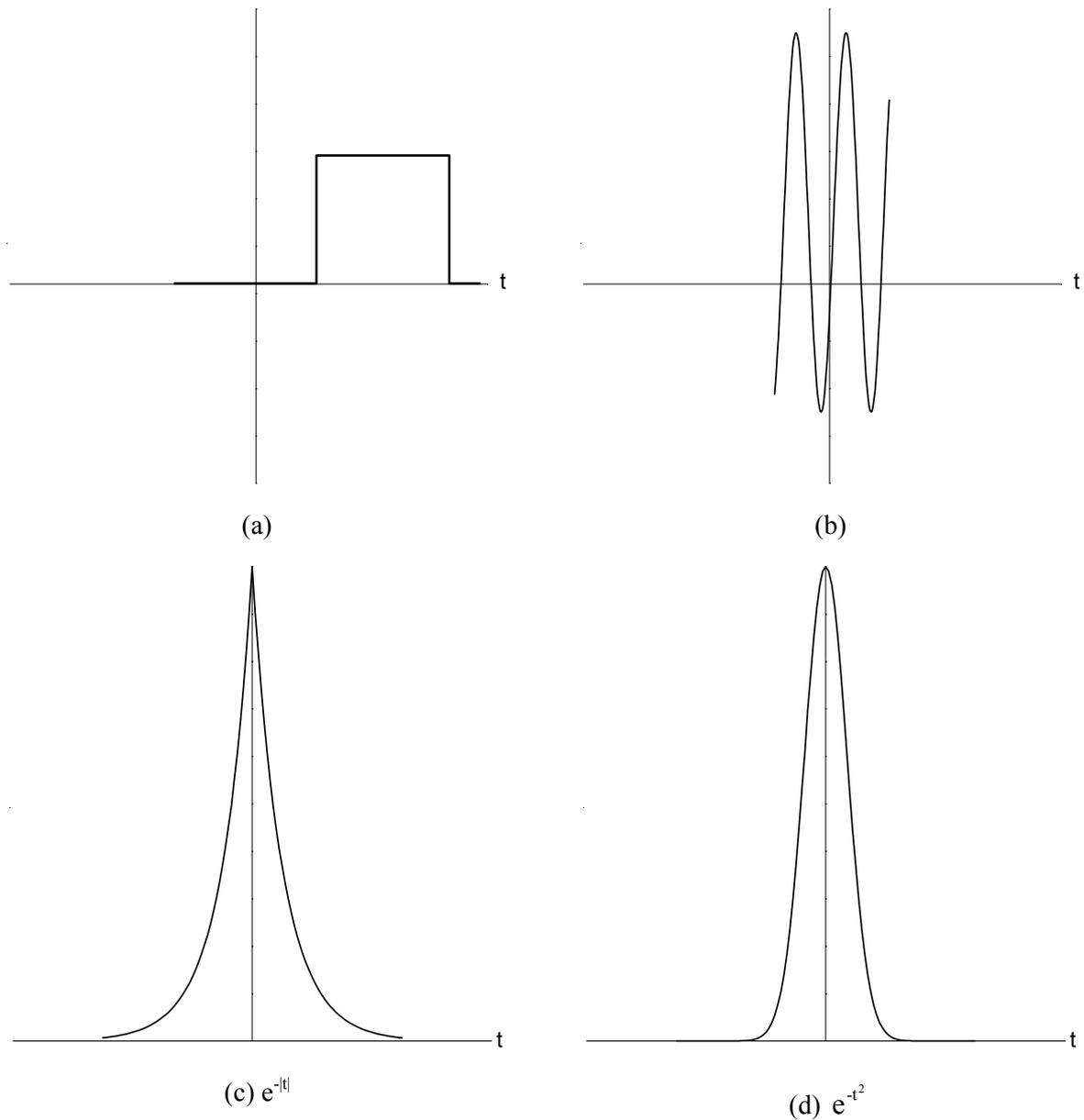


Figura 2.4. Ejemplos de señales de energía.

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \quad [\text{wattios}] \quad (2.8)$$

Una señal de energía tiene una energía finita pero una potencia media nula, mientras una señal de potencia posee una potencia media finita pero energía indefinida. En general, las señales periódicas y aleatorias son de potencia, por ejemplo las señales mostradas en las figuras 2.1.a y 2.2.b, y las deterministas y no periódicas son de energía, como las mostradas en la Figura 2.4.

2.2. SEÑALES PERIÓDICAS.

Hemos definido una señal periódica según la Ecuación 2.1, y una condición que debe cumplir es que no tenga tiempo de inicio o de finalización, esto es, que sea eterna. Por lo tanto, es una señal de potencia que cumple la condición 2.8. Todo esto indica, que las señales estrictamente periódicas no son realizables, sin embargo, el concepto de señal periódica es simple y muy útil, pudiéndose generar fácilmente señales que se aproximen a la idea conceptual.

Un caso especial de señal periódica, muy importante por su utilización en muchos aspectos de la teoría de señales, son las señales sinusoidales, que las podemos representar por:

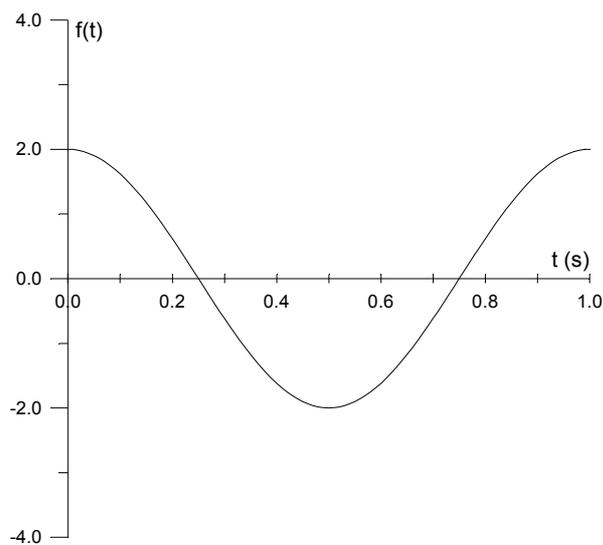
$$f(t) = A \cos(\omega t + \phi) = A \cos(2\pi f t + \phi) \quad (2.9)$$

donde A es la amplitud, ω la frecuencia angular, f la correspondiente frecuencia lineal ($\omega = 2\pi f$ y $f = 1/T$, donde T es el periodo de la señal) y ϕ la fase. En la Figura 5 se muestran algunos ejemplos de señales sinusoidales representados en el intervalo de 0 a 1 segundos. La gráfica (a) corresponde a un coseno de amplitud 2, fase nula y frecuencia $f = 1$ Hz (Hertzio Hz=1/s), por lo que se repetirá cada segundo. En la señal de la gráfica (b) se ha doblado la frecuencia, $f = 2$ Hz, con lo que cada segundo la señal se repite dos veces o, lo que es lo mismo, el periodo sería $T = 0.5$ s. La señal (c) tiene una amplitud $A = 4$, con lo que la excursión de la señal en el eje 'y' es mayor. Por último, la diferencia entre la gráfica (a) y la (d) está en la fase, pues para esta última vale $\phi = \pi/2$, lo que quiere decir que la señal está desfasada un cuarto del ciclo completo (2π).

Es importante señalar que toda la teoría que se expondrá en el presente apartado será aplicable exclusivamente a las señales periódicas en general, dedicándose el apartado posterior a las señales que no lo son.

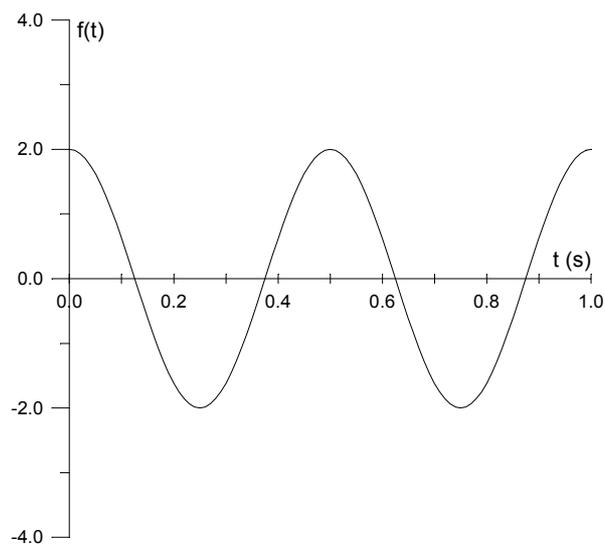
2.2.1. Series de Fourier

La mayor parte de las señales periódicas de interés pueden aproximarse por la suma de señales sinusoidales con las frecuencias, fases y amplitudes adecuadas. De forma general, el error entre esta aproximación y la señal real será más pequeño cuantos más términos se tengan en cuenta en dicha suma. En la Figura 2.6 se muestra este hecho, pues se aproxima la señal periódica de frecuencia $f = 1/4$ Hz de la gráfica (a), mediante la suma de las cuatro señales sinusoidales de la gráfica (b), dando como resultado la señal mostrada en (c).



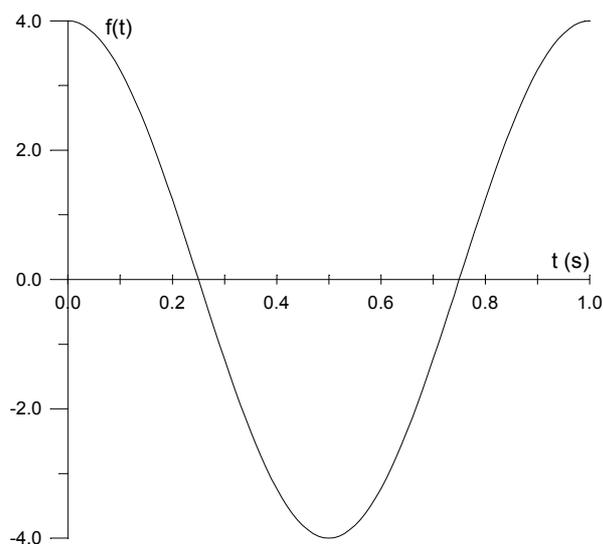
$$f(t) = 2 \cos(2\pi t + 0)$$

(a)



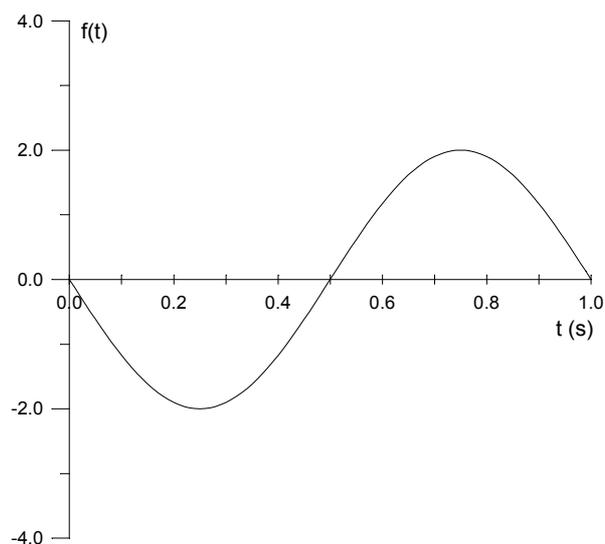
$$f(t) = 2 \cos(2\pi 2t + 0)$$

(b)



$$f(t) = 4 \cos(2\pi t + 0)$$

(c)



$$f(t) = 2 \cos(2\pi t + \pi/2)$$

(d)

Figura 2.5. Ejemplos de señales sinusoidales.

Para aproximar una señal **periódica** cualquiera, necesitamos una senoide para cada múltiplo entero de la frecuencia fundamental de dicha señal, siempre que podamos fijar la amplitud y la fase de cada una de las sinusoides. La frecuencia fundamental, f_0 , es la inversa del periodo de la señal a aproximar:

$$f_0 = \frac{1}{T} \text{ [Hz]} \quad (2.10)$$

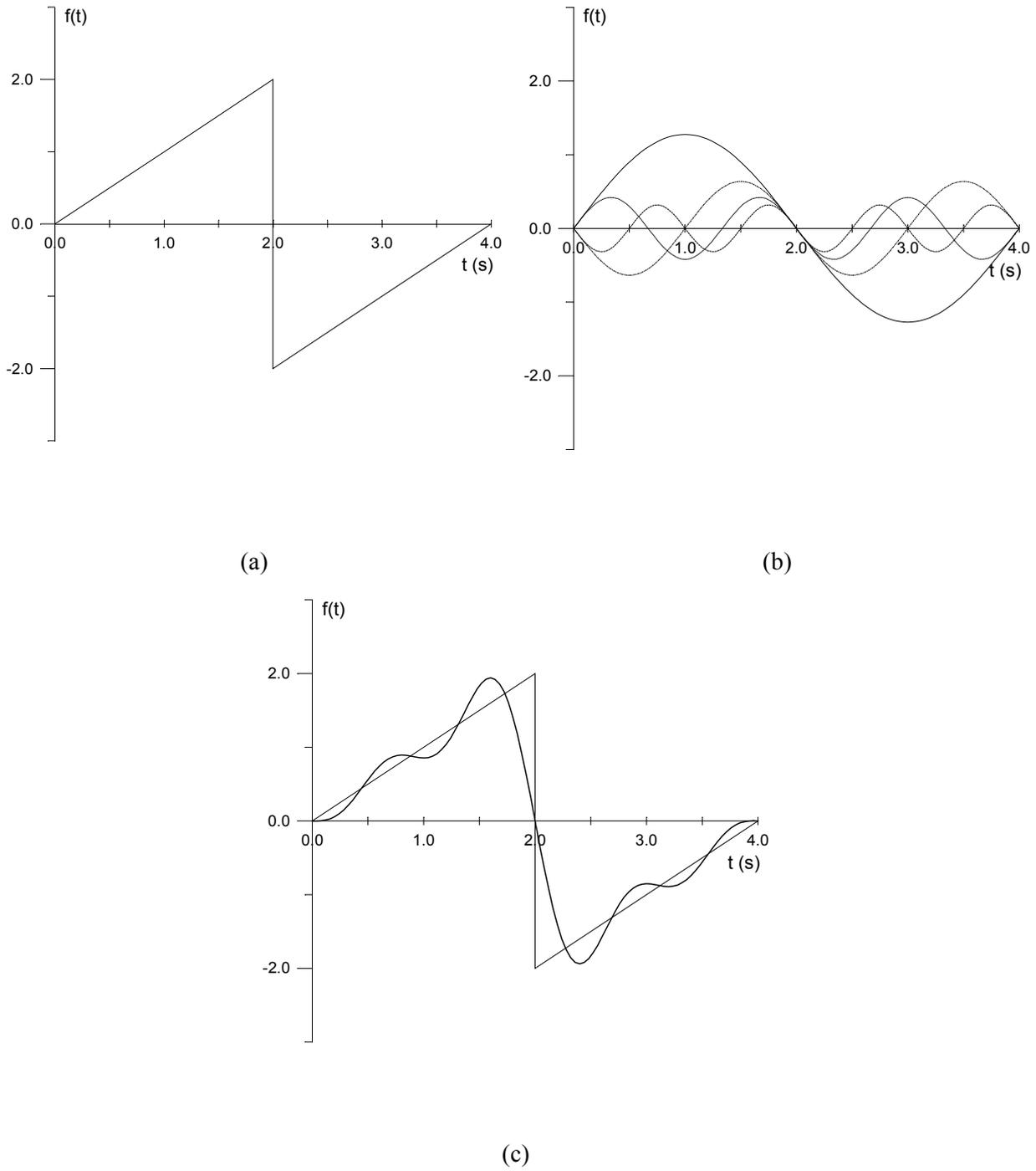


Figura 2.6. Ejemplo de serie de Fourier (c) de 4 armónicos (b) para aproximar la señal original (a)

La correspondiente frecuencia angular fundamental sería:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ [rad/s]} \quad (2.11)$$

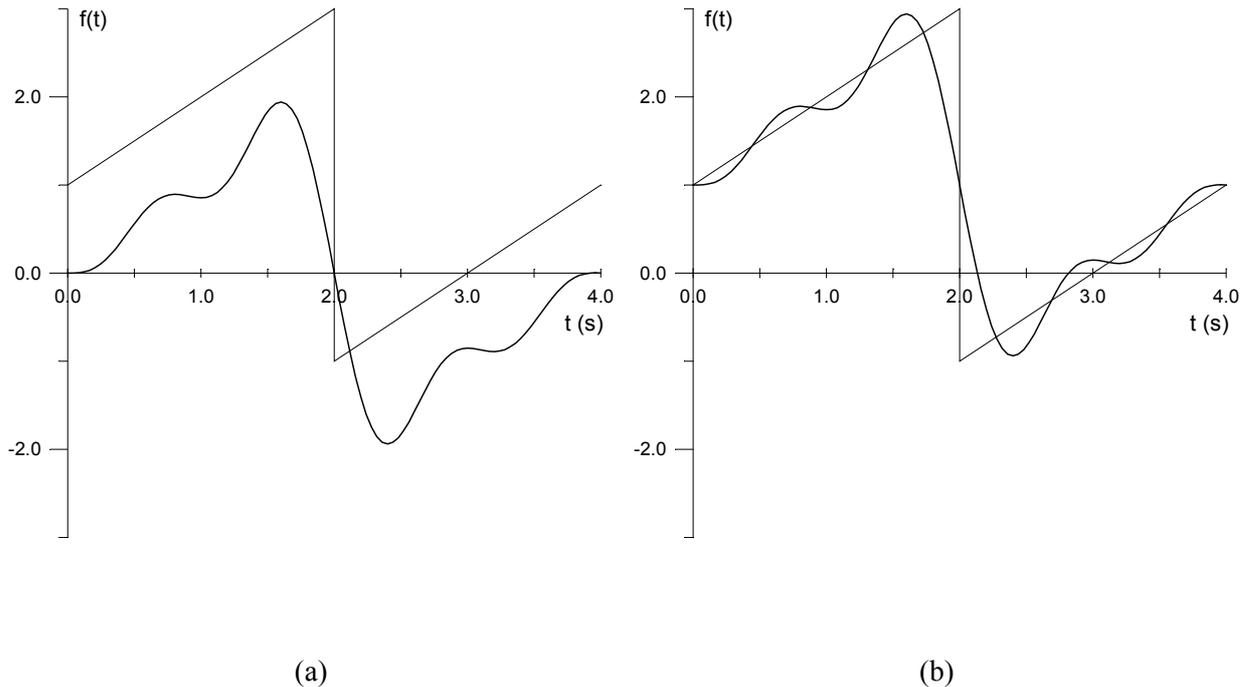


Figura 2.7. Aproximación de una señal periódica con componente continua (a) sin tener en cuenta dicha componente en el desarrollo y (b) teniéndola en cuenta.

Las sinusoides del desarrollo con frecuencias iguales a $f_n = n f_0$ (con n un entero) se denominan armónicos n -ésimos del fundamental. Además, un hecho importante que debemos tener en cuenta es que al sumar sinusoides siempre obtendremos una función que será simétrica respecto al eje temporal, por lo tanto no podremos aproximar aquellas funciones periódicas que, durante un periodo, no permanezcan el mismo tiempo con valores positivos que con valores negativos. En la Figura 2.6 la señal periódica que se pretende aproximar es simétrica respecto al eje temporal, sin embargo, la de la Figura 2.7.a no lo es, por lo que no puede ser aproximada por la suma de sinusoides, es necesario añadir una constante al sumatorio que tenga en cuenta el desplazamiento vertical de la señal, como se muestra en la Figura 2.7.b. Esta componente se denomina componente de continua de la señal, ya que está asociada a la frecuencia nula (0 Hz), y corresponde al valor medio de la señal:

$$F_{dc} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (2.12)$$

No debe confundirse con la definición de potencia expresada en la Ecuación 2.8.

En general la suma de las sinusoides necesarias para aproximar una señal periódica se conoce como **Serie de Fourier** y la podemos expresar, por ejemplo para una tensión $v(t)$, de la siguiente forma:

$$v(t) = c_0 + c_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + c_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + c_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) + \dots \quad (2.13)$$

donde c_0 es el término de continua, la senoide asociada a la frecuencia $\omega_1=1$ $\omega_0=2\pi/T$ el primer armónico, la asociada a $\omega_2=2 \omega_0$ el segundo armónico, etc.

2.2.1.1. FORMA TRIGONOMÉTRICA.

Como hemos visto, una señal periódica se puede aproximar por una suma de cosenos más la componente de continua, que lo podemos expresar de forma compacta como:

$$v(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\omega_n t + \phi_n) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (2.14)$$

De forma similar podemos desarrollar $v(t)$ en forma de suma de senos y cosenos con fase nula:

$$v(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sen(\omega_n t)] \quad (2.15)$$

En este caso cada armónico quedaría expresado en función de dos números reales que corresponden a las amplitudes del seno y del coseno para la frecuencia en cuestión, en lugar de estar en función de la amplitud y la fase del coseno como en la Ecuación 2.14. Ambas expresiones son equivalentes, como se puede comprobar fácilmente. Los términos c_0 y a_0 son iguales pues corresponden a la componente de continua. Para cada uno de los armónicos, si multiplicamos y dividimos por $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ en la Ecuación 2.15 y lo denotamos por c_n :

$$\begin{aligned} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos \omega_n t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sen \omega_n t \right) &= c_n (\cos \theta_n \cos \omega_n t + \sen \theta_n \sen \omega_n t) = \\ c_n \cos(\omega_n t - \theta_n) &= c_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \end{aligned}$$

donde el ángulo θ_n está relacionado con a_n y b_n según el esquema de la Figura 2.8 y:

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (2.16)$$

$$\tg \phi_n = \tg -\theta_n = \frac{-b_n}{a_n} \Rightarrow \phi_n = \arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) \quad (2.17)$$

Si las amplitudes c_n , de los armónicos de la serie de Fourier son representados frente a la frecuencia, el resultado se conoce como **espectro de amplitud discreto o de líneas**. De la misma forma, si representamos las fases frente a la frecuencia el resultado es el **espectro de fase discreto**. Un ejemplo se muestra en la Figura 2.9.

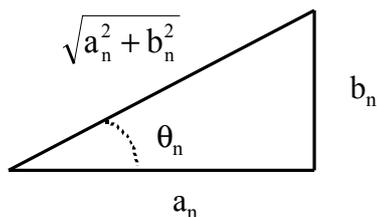


Figura 2.8. Relación entre θ_n y las amplitudes del desarrollo en serie de Fourier en senos y cosenos.

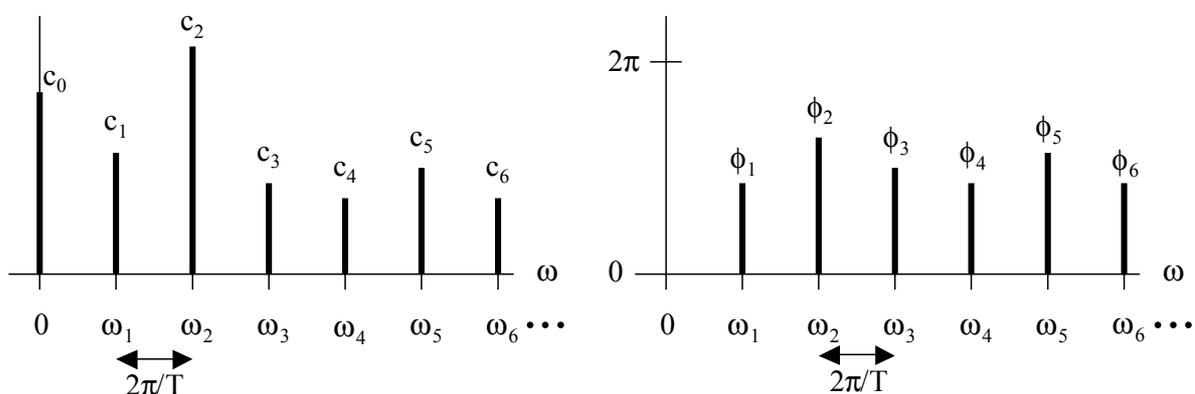


Figura 2.9. Ejemplo de espectros discretos de amplitud y fase.

Se puede observar que aparece una línea para cada frecuencia discreta, múltiplo entero de la frecuencia fundamental ω_0 , de ahí su nombre. Además, la fase para la frecuencia nula no está definida. Esta representación da idea de la importancia que tienen las distintas frecuencias en la composición de la señal periódica que estemos aproximando.

2.2.1.2. CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER.

El primer coeficiente, $a_0=c_0$, que corresponde a la componente continua es la media o valor medio de la señal, por lo que puede calcularse de la siguiente forma:

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v(t) dt \quad (2.18)$$

En la práctica es más fácil usar la forma trigonométrica en función de senos y cosenos para obtener los coeficientes. Sin embargo, antes de calcularlos es necesario conocer algunas propiedades de las funciones seno y coseno:

$$\int_t^{t+T} \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{para } n \neq 0 \quad (2.19)$$

$$\int_t^{t+T} \sin(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{para todo } n \quad (2.20)$$

Es decir, la integral de ambos sobre un periodo entero es cero, pues la función está el mismo tiempo sobre el eje temporal que bajo él, como se muestra en la Figura 2.10.a. Por otro lado, el seno y el coseno forman un conjunto de **funciones ortogonales**, por lo que cumplen:

$$\int_t^{t+T} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ T/2 & \text{si } m = n \neq 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\int_t^{t+T} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ T/2 & \text{si } m = n \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\int_t^{t+T} \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{para todo } m \text{ y } n \quad (2.23)$$

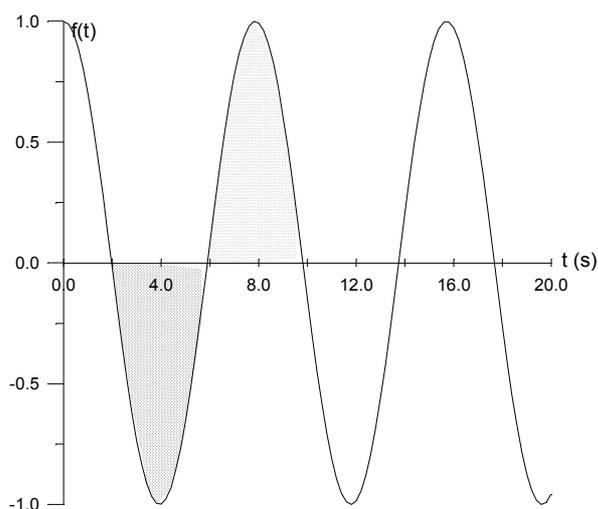
En la Figura 2.10 se muestran algunos ejemplos de productos de funciones seno y coseno, donde se ha sombreado el área correspondiente a la integral sobre un periodo. La gráfica (b) representa el producto de dos cosenos con distinta frecuencia con lo que el área total bajo el eje temporal y sobre él son iguales. No ocurre lo mismo cuando ambas frecuencias son la misma, como es ejemplificado en la gráfica (c), en este caso el resultado de la integral sería distinto de cero. Cuando el producto corresponde al coseno por el seno, el área bajo el eje horizontal siempre es igual al área sobre el mismo, sin importar los valores de los enteros m y n .

Para calcular los coeficientes, partimos del desarrollo de Fourier en senos y cosenos, Ecuación 2.15, multiplicando ambos lados de la misma por $\cos(m\omega_0 t)$ e integrando sobre un periodo:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} v(t) \cos(m\omega_0 t) dt &= a_0 \int_t^{t+T} \cos(m\omega_0 t) dt + \int_t^{t+T} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) \right] dt \\ &+ \int_t^{t+T} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) \right] dt \end{aligned}$$

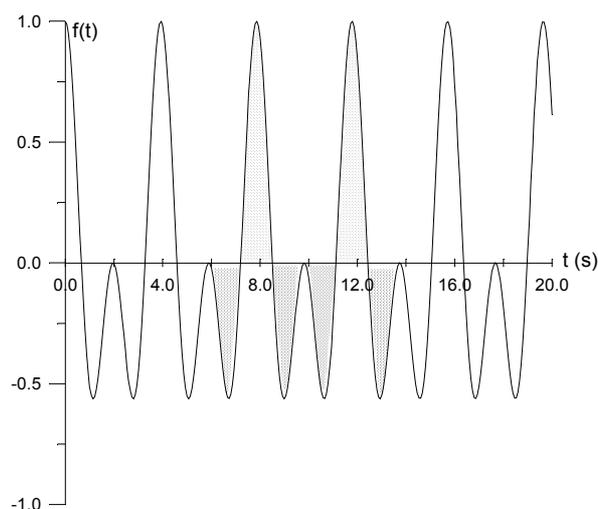
Teniendo en cuenta las ecuaciones 2.19 a 2.23 e intercambiando el sumatorio con la integral:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} v(t) \cos(m\omega_0 t) dt &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_t^{t+T} \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_t^{t+T} \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt \\ &= a_m \frac{T}{2} \end{aligned}$$



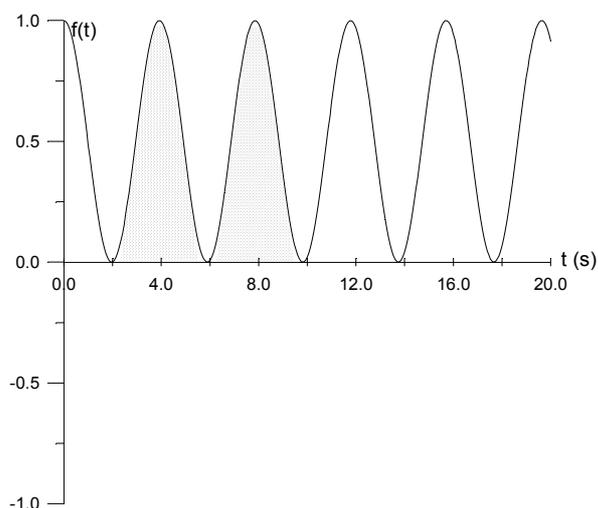
$$f(t) = \cos(0.8t)$$

(a)



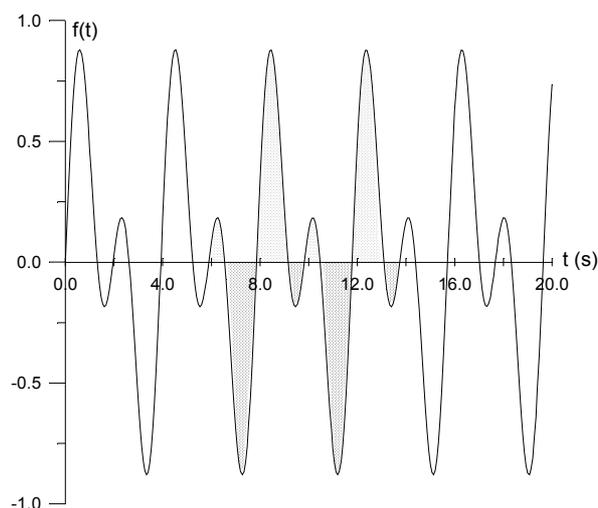
$$f(t) = \cos(0.8t) * \cos(2.4t)$$

(b)



$$f(t) = \cos(0.8t) * \cos(0.8t)$$

(c)



$$f(t) = \cos(0.8t) * \text{sen}(2.4t)$$

(d)

Figura 2.10. Propiedades de las funciones seno y coseno como funciones ortogonales.

El primer y tercer términos a la derecha de la igualdad son siempre nulos, y el segundo es sólo distinto de cero cuando $m=n$. Siguiendo un procedimiento similar para el seno, obtenemos los coeficientes b_n , con lo que tenemos:

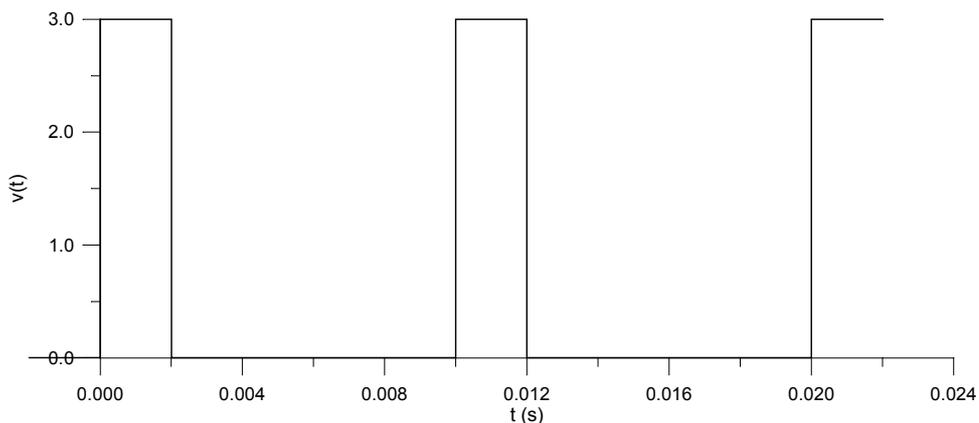
$$a_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} v(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (2.24)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} v(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt \quad (2.25)$$

De cierta forma puede verse como la aplicación de filtros a la señal original $v(t)$. Si, por ejemplo, $v(t)$ tiene una componente parecida a $\cos(n\omega_0 t)$ el coeficiente a_n será importante. Realmente lo que hacemos es calcular la media, en un periodo, del producto de la señal por la sinusoide correspondiente. Si $v(t)$ tiende a ser positiva cuando $\cos(n\omega_0 t)$ es positivo y negativa cuando el coseno es negativo, la media en el periodo será grande, indicando un buen grado de similitud entre ambos. Si, por el contrario, $v(t)$ tiende a ser negativa cuando $\cos(n\omega_0 t)$ es positivo y viceversa, la media del producto sería grande pero negativa. Si existe poca correlación entre $v(t)$ y $\cos(n\omega_0 t)$ la media sería cercana a cero, indicando que $v(t)$ no tiene ninguna componente que se asemeje al coseno con esta frecuencia.

Ejemplo 2.1.

Encontrar y representar los dos primeros coeficientes de Fourier de una señal rectangular unipolar que forma un tren de pulsos de amplitud 3V, con periodo 10ms y que permanece en alta el 20% del mismo. El inicio del pulso (flanco de subida) coincide con $t=0$.



El término de continua sería:

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_0^{t+T} v(t) dt = \frac{1}{0.01} \int_0^{0.002} 3 dt = 0.6V$$

Los coeficientes a_n , teniendo en cuenta que $\omega_0 = 2\pi/T$:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{t+T} v(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{0.01} \int_0^{0.002} 3 \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{3}{n\pi} \operatorname{sen} \left(n \frac{2\pi}{0.01} \cdot 0.002 \right)$$

con lo que

$$a_1 = 0.9082V \text{ y } a_2 = 0.2806V$$

De forma similar, para los coeficientes b_n :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} v(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{0.01} \int_0^{0.002} 3 \sin(n\omega_0 t) dt = -\frac{3}{n\pi} \left[\cos\left(n \frac{2\pi}{0.01} 0.002\right) - 1 \right]$$

y

$$b_1 = 0.6598V \text{ y } b_2 = 0.8637V$$

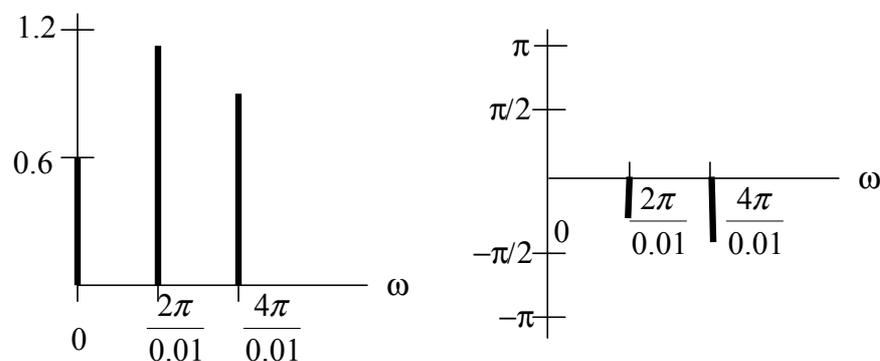
Según esto y teniendo en cuenta las ecuaciones 2.16 y 2.17, las amplitudes de los dos primeros armónicos serán:

$$c_1 = 1.1226V \text{ y } c_2 = 0.9081V$$

y las fases

$$\phi_1 = -36^\circ = -0.628 \text{ rad y } \phi_2 = -72^\circ = -1.257 \text{ rad.}$$

Los espectros correspondientes serían:



2.2.1.3. SEÑALES CON SIMETRÍA.

Para funciones con ciertas propiedades de simetría el cálculo de algunos coeficientes del desarrollo en serie de Fourier se simplifica. Vamos a ver algunos casos:

a) Media cero. $\int_t^{t+T} v(t) dt = 0$. Ejemplo: Figura 2.11.a.

En este caso, como es lógico, $a_0 = c_0 = 0$. El resto debe calcularse.

b) Simetría de media onda. $v(t) = -v\left(t + \frac{T}{2}\right)$. Ejemplo: Figura 2.11.b.

Posee media nula, con lo que $a_0 = c_0 = 0$. Además, los a_n y b_n pueden calcularse para medio periodo y sólo para n impar:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} v(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} v(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad \text{con } n \text{ impar.}$$

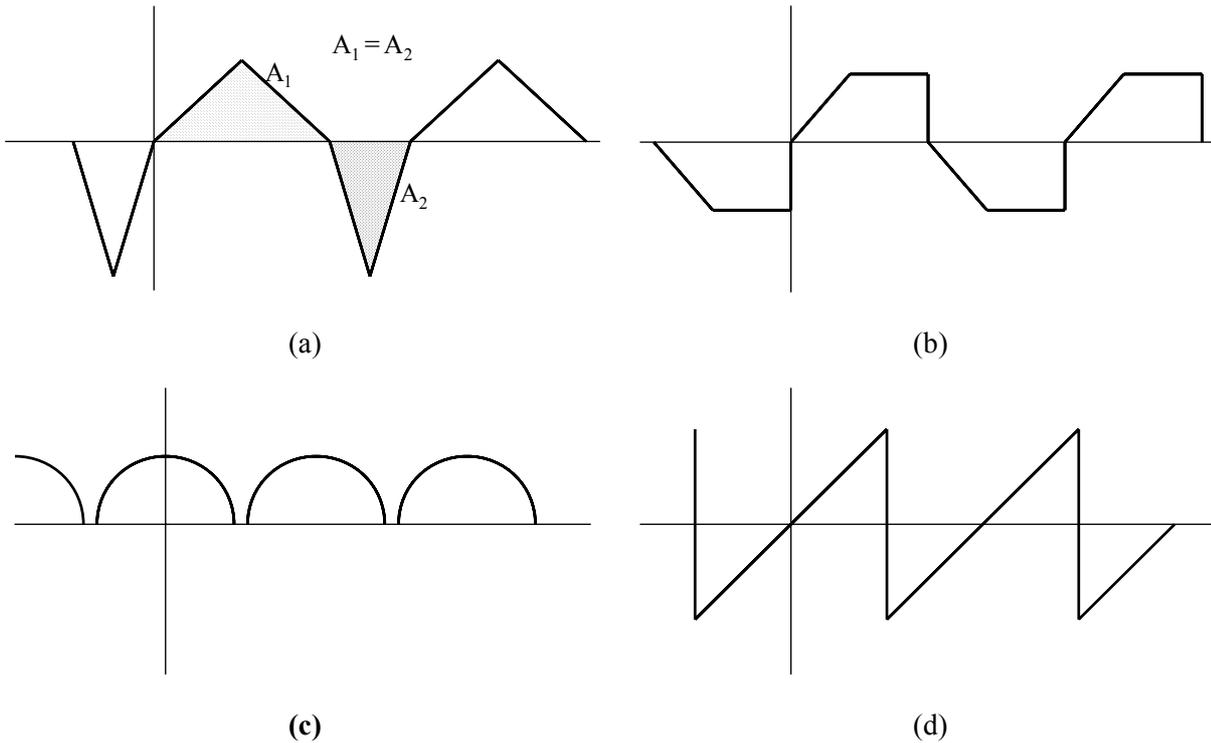


Figura 2.11. Ejemplos de funciones con simetrías especiales: a) Media nula. b) Simetría de media onda. c) Simetría par. d) Simetría impar.

c) Simetría par. $v(t) = v(-t)$. Ejemplo: Figura 2.11.c.

En este caso los $b_n=0$ para todo n . Además, podemos calcular:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} v(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

d) Simetría impar. $v(t) = -v(-t)$. Ejemplo: Figura 2.11.d.

En este caso los $a_n=0$ para todo n y $a_0=0$. Los b_n pueden calcularse según:

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} v(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

2.2.1.4. FORMA EXPONENCIAL.

Una forma alternativa de calcular los coeficientes de Fourier sería calcularlos conjuntamente, para ello definimos el número complejo F'_n como una combinación de los coeficientes a_n y b_n :

$$F'_n = a_n - jb_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} v(t) [\cos(n\omega_0 t) + j \sin(n\omega_0 t)] dt \tag{2.26}$$

De esta forma el desarrollo en serie quedaría:

$$v(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sen(n\omega_0 t)] = a_0 + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} F'_n e^{jn\omega_0 t} \right\} \quad (2.27)$$

donde $\operatorname{Re}\{\}$ denota la parte real. Vamos a ver que ambas expresiones son equivalentes:

$$\begin{aligned} F'_n e^{jn\omega_0 t} &= (a_n - jb_n)(\cos(n\omega_0 t) + j\sen(n\omega_0 t)) = \\ &= a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sen(n\omega_0 t) + j(a_n \sen(n\omega_0 t) - b_n \cos(n\omega_0 t)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

y se puede observar que la parte real corresponde con el término del desarrollo trigonométrico.

De todas formas, la expresión 2.27 es poco elegante, pues hemos separado la componente de continua y debemos tomar la parte real del resultado. Esto puede solucionarse al tomar el sumatorio entre $-\infty$ y $+\infty$ y definiendo un nuevo coeficiente de la forma:

$$F_n = \begin{cases} \frac{F'_n}{2} = \frac{a_n - jb_n}{2} & \text{si } n > 0 \\ a_0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{F'_{-n}^*}{2} = \frac{a_{-n} + jb_{-n}}{2} & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Con lo que la serie queda:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.30)$$

Y la forma de los coeficientes:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2.30)$$

Para $n=0$ $e^{jn\omega_0 t}=1$, por lo que $F_0=a_0=c_0$. Para cualquier $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} |F_n| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}a_n\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b_n\right)^2} = \frac{1}{2}c_n \\ \phi_n &= \arg(F_n) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \end{aligned}$$

Si $v(t)$ es una función real, lo que suele ser habitual, se cumple:

$$|F_n| = |F_{-n}| \quad \text{y} \quad \phi_n = -\phi_{-n}$$

En este caso los espectros discretos de amplitud y fase estarían definidos para frecuencias discretas tanto positivas como negativas, como se muestra en la Figura 2.12.

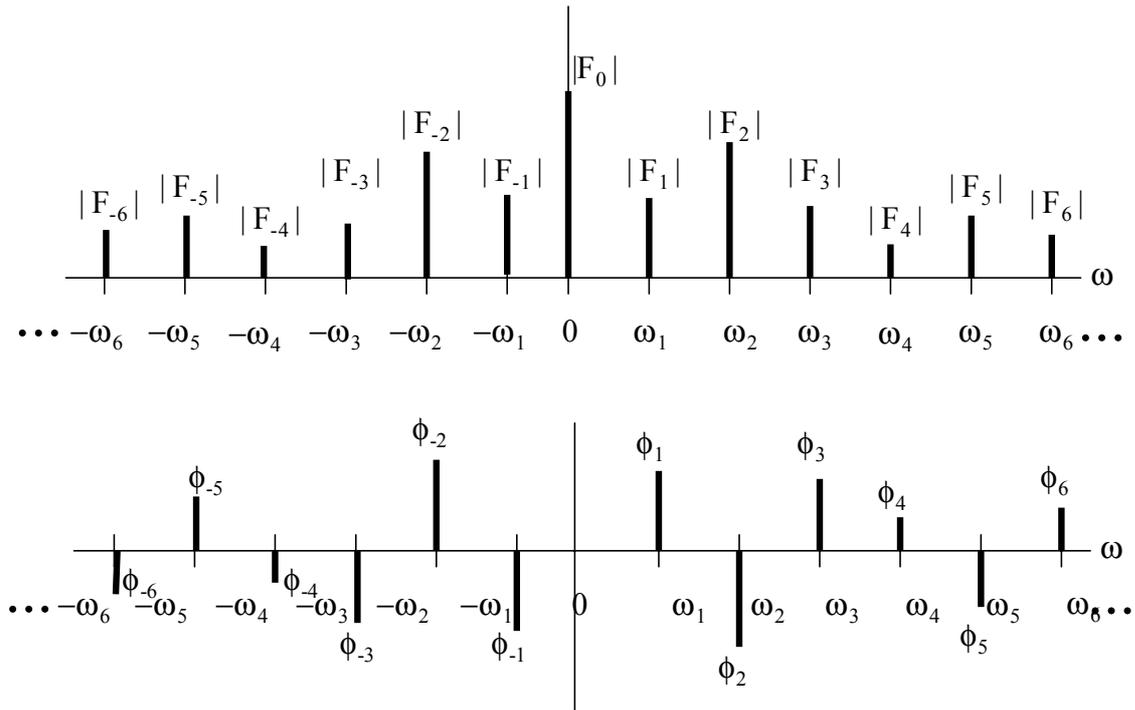


Figura 2.12. Ejemplo de espectros discretos de amplitud y fase para el desarrollo exponencial.

2.2.1.5. TEOREMA DE PARSEVAL.

La potencia promedio normalizada de una señal periódica, esto es, la potencia disipada en un resistencia de 1Ω debido a la señal $f(t)$ es:

$$P = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t) \cdot f^*(t) dt \quad [\text{wattios}]$$

Si sustituimos la señal por el correspondiente desarrollo en serie de Fourier exponencial:

$$P = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{jm\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* e^{-jn\omega_0 t} dt$$

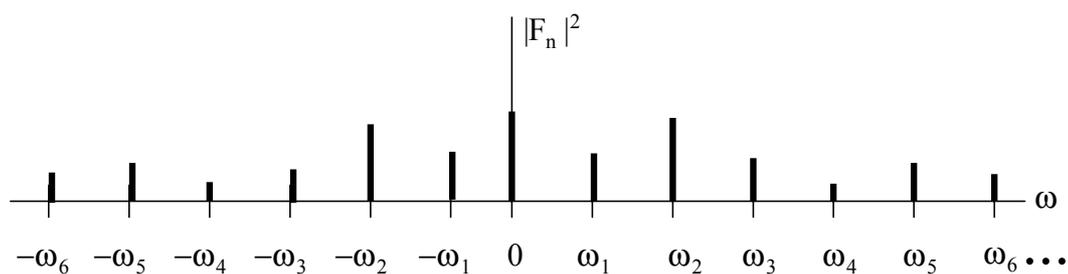
Si se supone que $f(t)$ es integrable en el intervalo de integración considerado se puede intercambiar el orden de los sumatorios y la integral:

$$P = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* \frac{1}{T} \int_t^{t+T} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt$$

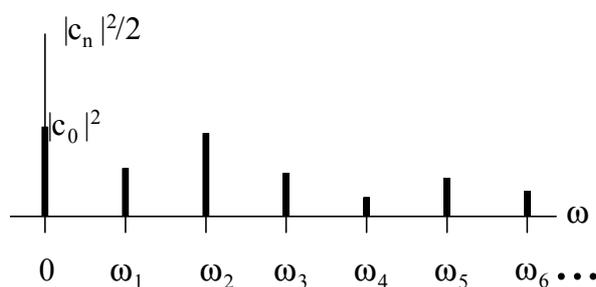
Pero, las funciones $e^{jm\omega_0 t}$ también son ortogonales, cumpliendo:

$$\int_t^{t+T} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \begin{cases} T & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \quad (2.31)$$

Por lo tanto:



(a)



(b)

Figura 2.13. Ejemplo de espectros discretos de potencia (a) para el desarrollo exponencial y (b) para el desarrollo trigonométrico.

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

El Teorema de Parseval para señales periódicas queda:

$$P = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \quad (2.32)$$

Esto es, si se conoce la función del tiempo $f(t)$ se puede hallar la potencia promedio y, por otro lado, ésta también puede calcularse si se conocen sus coeficientes de Fourier. Si representamos los términos $|F_n|^2$ frente a la frecuencia obtenemos el denominado **espectro de potencias discreto**, como muestra el ejemplo de la Figura 2.13.a.

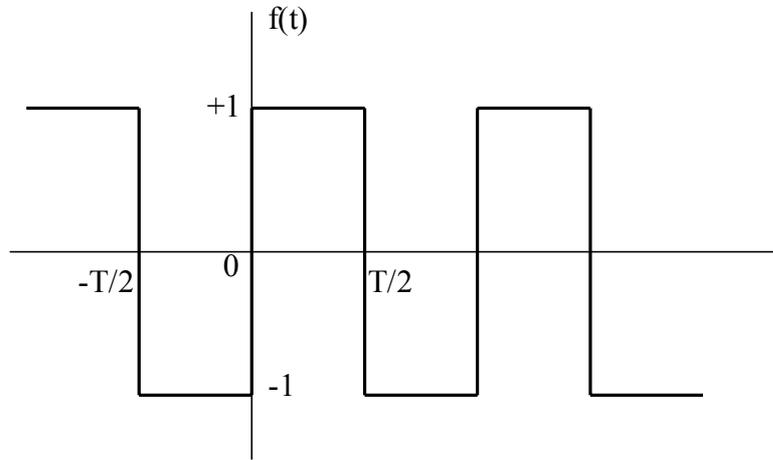
En el caso del desarrollo de Fourier en forma trigonométrica el Teorema de Parseval puede expresarse de la siguiente forma:

$$P = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |f(t)|^2 dt = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{2} \quad (2.33)$$

Esto daría un espectro de potencias discreto sólo para potencias positivas, como se muestra en el ejemplo de la Figura 2.13.b.

Ejemplo 2.2.

Encontrar la proporción de la potencia total contenida en el término de continua (DC) y los dos primeros armónicos de la siguiente señal:



La potencia media total en un periodo sería:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 (-1)^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 1^2 dt = 1W$$

Para calcular la potencia contenida en los dos primeros armónicos y el término de continua vamos a utilizar tanto el desarrollo en serie trigonométrica como el exponencial. Comencemos por el primero:

a) Es una función de media nula por lo que $a_0=0$.

Además tiene simetría impar por lo que los a_n son nulos.

Sólo debemos calcular los b_n :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 (-1) \text{sen}(n\omega_0 t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} (+1) \text{sen}(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)]$$

Según esto, los dos primeros coeficientes serían:

$$b_1=4/\pi \quad \text{y} \quad b_2=0.$$

Por lo tanto:

$$c_0=a_0=0, \quad c_1=4/\pi \quad \text{y} \quad c_2=0.$$

Según el teorema de Parseval la potencia contenida en estos tres términos sería:

$$|c_0|^2 + \frac{|c_1|^2}{2} + \frac{|c_2|^2}{2} = 0 + \frac{8}{\pi^2} + 0 = \frac{8}{\pi^2}$$

Que representa un porcentaje de la potencia total

$$\frac{\frac{8}{\pi^2}}{1} = 0.81 = 81\%$$

b) Utilizando el desarrollo en serie exponencial:

$$F_0 = c_0 = 0$$

y

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 (-1) e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} (1) e^{-jn\omega_0 t} dt =$$

$$\frac{1}{jn2\pi} \{1 - e^{jn\pi} - e^{-jn\pi} + 1\} = \frac{1}{jn2\pi} [2 - 2\cos(n\pi)] = \frac{1}{jn\pi} [1 - \cos(n\pi)]$$

Los términos correspondientes a los dos primeros armónicos son:

$$F_1 = \frac{1}{j\pi} [1 - (-1)] = \frac{2}{j\pi} \qquad F_{-1} = \frac{1}{-j\pi} [1 - (-1)] = \frac{-2}{j\pi}$$

$$F_2 = \frac{1}{2j\pi} [1 - (1)] = 0 \qquad F_{-2} = \frac{1}{-2j\pi} [1 - (1)] = 0$$

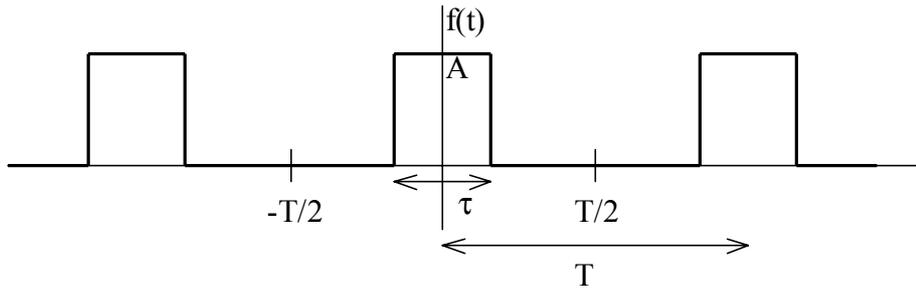
Según el teorema de Parseval la potencia contenida en los dos primeros armónicos y en la componente de continua sería:

$$|F_{-2}|^2 + |F_{-1}|^2 + |F_0|^2 + |F_1|^2 + |F_2|^2 = 0 + (4/\pi^2) + 0 + (4/\pi^2) + 0 = 8/\pi^2$$

Con lo que el porcentaje de la potencia total sería, igual que en el apartado anterior, 81%.

Ejemplo 2.3.

Calcular el espectro de Fourier discreto para la función periódica pulso cuadrado mostrada en la siguiente figura:



Los coeficientes de Fourier del desarrollo exponencial son de la forma:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{-A}{jn\omega_0 T} \left\{ e^{-jn\omega_0(\tau/2)} - e^{-jn\omega_0(-\tau/2)} \right\} = \frac{2A}{n\omega_0 T} \text{sen}\left(n\omega_0 \frac{\tau}{2}\right) = \frac{A\tau}{T} \frac{\text{sen}(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} = \frac{A\tau}{T} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \text{sinc}(x)$$

donde $x = n\omega_0\tau/2 = n\pi\tau/T$

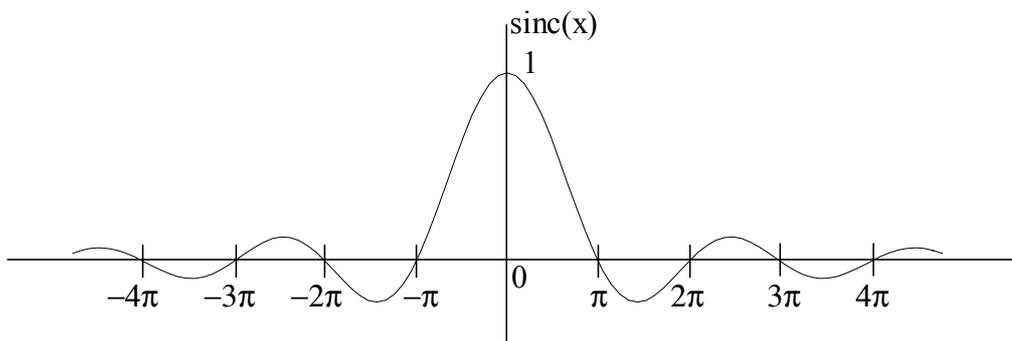
Esto no tiene sentido para $n=0$, por lo que lo calculamos:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A dt = \frac{A\tau}{T}$$

Sin embargo, como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$, podemos generalizar escribiendo:

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) e^{jn\omega_0 t} \quad \text{con } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Vamos a ver la forma de la función sinc(x):



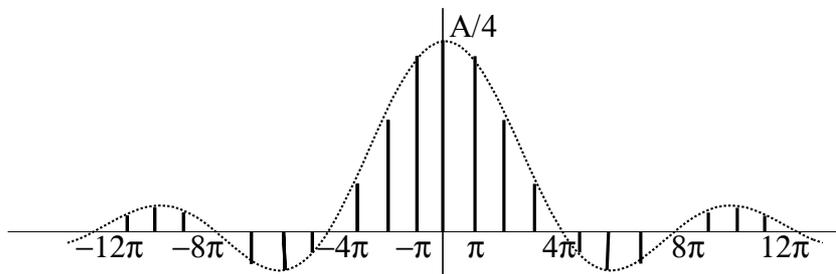
Para representar el espectro vamos a asignar varios valores numéricos a T y τ :

a) $T=2, \tau=1/2$

Con esto $\omega_0 = \pi$, con lo que la separación entre las líneas del espectro sería π .

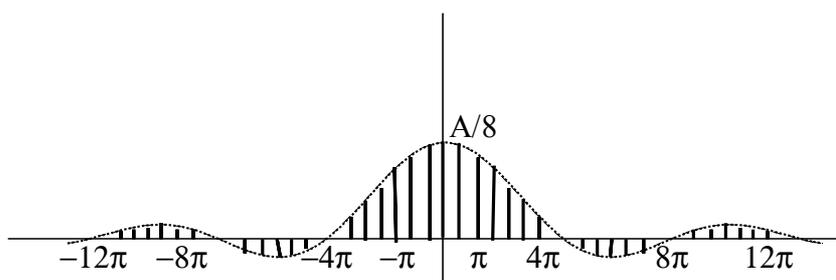
Los ceros de la función $\text{sinc}(x)$ se producen cuando $x=m\pi$ ($m=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$). Esto es, cuando $n\pi\tau/T = m\pi$, o cuando $n=4m$. Es decir, cada 4 líneas se produce un cero de la envolvente.

La amplitud máxima sería $A/4$. Todo esto se representa en la figura siguiente:



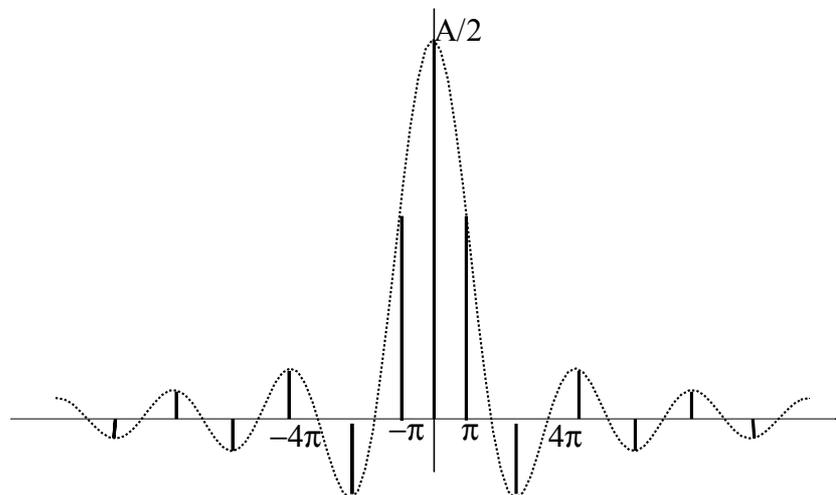
b) $T=4, \tau=1/2$

En este caso se la envolvente se anula cada 8 líneas, pues $n=8m$, pero la distancia entre líneas se ha reducido a la mitad, $\omega_0=\pi/2$, al ser el periodo T el doble. La amplitud máxima es $A/8$.



c) $T=2, \tau=1$

El periodo es el mismo que en el primer caso, por lo que la separación entre las líneas será $\omega_0=\pi$. Los ceros de la envolvente se producirán cada 2 líneas, pues $n=2m$. La amplitud máxima para, $\omega=0$, es en este caso $A/2$



En general podemos deducir que la forma del espectro, su envolvente, depende de la forma del pulso y no del periodo de la señal. Sin embargo, éste fija la frecuencia fundamental de la señal y, por lo tanto, la separación entre las líneas del espectro.

2.2.2. Ancho de banda de una señal.

El ancho de banda de una señal se define como la diferencia (usualmente expresada en Hz) entre las frecuencias mínima, f_{\min} , y máxima, f_{\max} , nominales. El problema surge al definir dichas frecuencias, dando lugar a diferentes definiciones para este concepto. Las más utilizadas son las siguientes:

- El ancho de banda absoluto, $f_{\max}-f_{\min}$, donde el espectro de la señal es nulo fuera del intervalo delimitado por ambas frecuencias. El problema de esta definición estriba en que muchos espectros se extienden infinitamente en frecuencias, como los mostrados en el Ejemplo 2.3.
- El ancho de banda de 3dB o ancho de banda de potencia mitad, $f_{\max}-f_{\min}$, donde estas frecuencias se fijan de forma que las componentes que quedan fuera del intervalo estén 3dB por debajo de la componente espectral de magnitud mayor. Si estamos tratando con amplitudes el corte estaría en 0.707 veces el mayor valor espectral y en el caso de potencias en la potencia mitad, 0.5 veces la potencia máxima.
- El ancho de banda de potencia, $f_{\max}-f_{\min}$, donde estas frecuencias definen la banda en la que reside el 99% de la potencia total de la señal.
- El ancho de banda nulo a nulo o ancho de banda de cruce cero, $f_{\max}-f_{\min}$, donde estas frecuencias definen el primer nulo del espectro a cada lado de la componente espectral de mayor magnitud.

Estas definiciones se representan en el ejemplo de la Figura 2.14.

En muchas ocasiones la frecuencia mínima coincide con la frecuencia cero, esto es, con la componente de continua, definiéndose el ancho de banda de la misma forma descrita anteriormente sin más que tomar $f_{\min}=0\text{Hz}$.

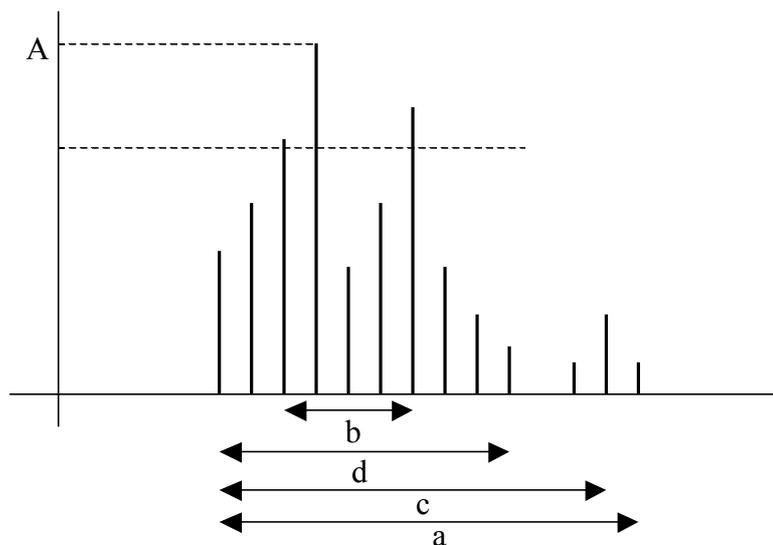


Figura 2.14. Diferentes definiciones de ancho de banda de una señal: a) absoluto, b) de 3 dB, c) de potencia y d) de nulo a nulo.

2.3. SEÑALES NO PERIÓDICAS.

Las señales que no son periódicas no pueden ser aproximadas por una suma discreta de armónicos, es decir, por una serie de Fourier. Por ello, para describir estas señales en dominio de la frecuencia, se utiliza una técnica más general denominada Transformada de Fourier.

2.3.1. Transformada de Fourier.

La forma tradicional de introducir el concepto de la transformada de Fourier es tratarla como un caso límite de una serie de Fourier para una señal periódica cuando su periodo tiende a ser infinito. Supongamos que tomamos una señal no periódica como la mostrada en la Figura 2.15.a. y queremos representarla por una suma discreta de funciones exponenciales en todo el intervalo temporal $(-\infty, \infty)$. Para ello construimos una nueva función, $f_T(t)$, periódica, de periodo T , de manera que $f(t)$ se repite cada T segundos, como se muestra en la Figura 2.15.b. La función original puede obtenerse a partir de $f_T(t)$ sin más que hacer tender T a infinito.

Como la nueva función, $f_T(t)$, es periódica la podemos representar por medio de una serie de armónicos:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

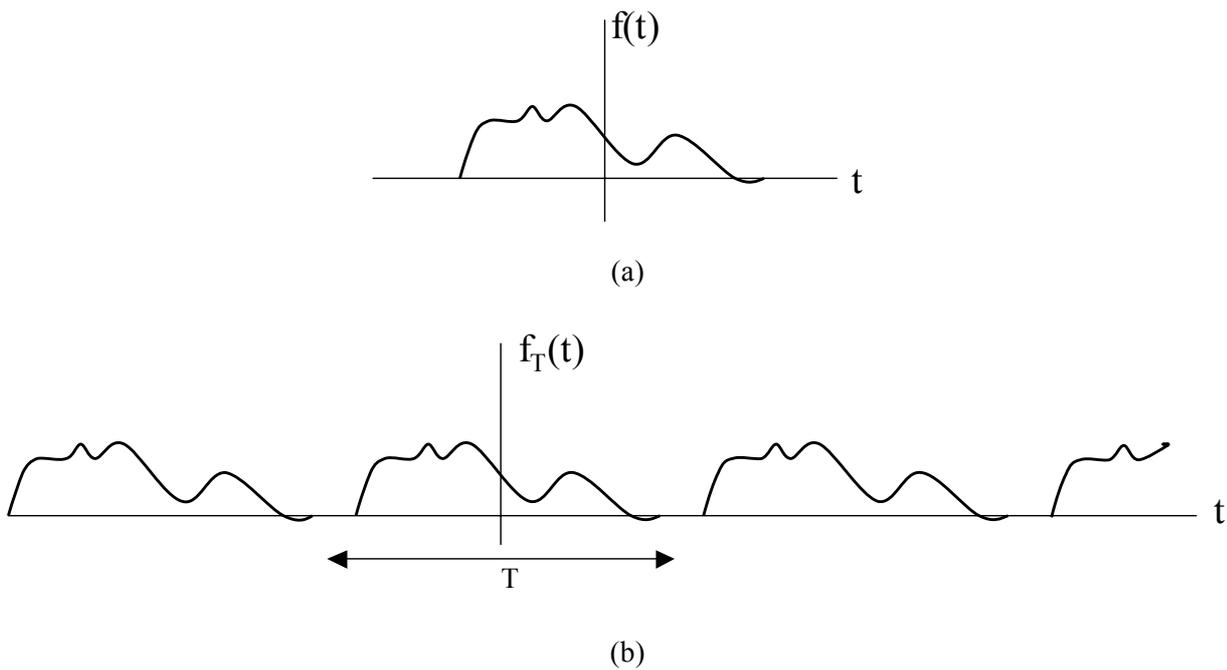


Figura 2.15. Extensión de la serie de Fourier al caso de señales no periódicas.

con

$$F_n = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt \quad y \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Antes de tomar límites debemos realizar algunos cambios en la notación:

$$\omega_n = n\omega_0$$

$$F(\omega_n) = T F_n$$

Por lo que tenemos:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

$$F(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

donde hemos sustituido ω_0 por el equivalente $\Delta\omega$ que denota la separación entre las líneas del espectro discreto. El intervalo de integración se realiza en un periodo simétrico respecto al origen.

Cuando hacemos el periodo T muy grande $\Delta\omega$ se hace muy pequeño, por lo que las líneas se acercan mucho entre si. En el límite, cuando $T \rightarrow \infty$ las líneas se unen formando lo que se conoce como espectro continuo. Por lo tanto, en este límite:

$$\begin{aligned}\omega_n &\rightarrow \omega \\ F(\omega_n) &\rightarrow F(\omega) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\end{aligned}$$

Teniendo esto en cuenta, podemos escribir:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

o, utilizando la frecuencia lineal $f=2\pi\omega$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi f t} df$$

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Estas ecuaciones se conocen como **par transformado de Fourier**, lo que se suele denotar por:

$$\text{Transformada directa de Fourier: } F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.34)$$

$$\text{Transformada inversa de Fourier: } f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.35)$$

La interpretación en el caso continuo es similar a la del caso discreto. Podemos suponer $F(\omega)$ como una función que da cuenta de la parte de la señal que es idéntica a $e^{j\omega t}$, representando $f(t)$ como una suma continua de funciones exponenciales, cuya amplitud relativa viene dada para cada frecuencia por $F(\omega)$. De esta forma, $F(\omega)$ sería la función densidad espectral de $f(t)$.

2.3.2. Señales con simetría.

Al igual que en el caso de las series de Fourier, si la señal $f(t)$ presenta cierta simetría es posible alguna simplificación en el cálculo de la función densidad espectral. En este caso, si

a) $f(t)$ es real y par:

$$F(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

b) $f(t)$ es real e impar:

$$F(\omega) = -2j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

2.3.3. Pares de transformadas de Fourier.

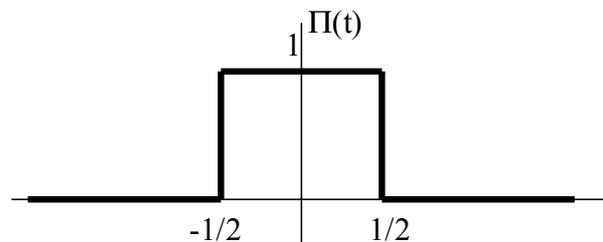
La transformada de Fourier, para señales no periódicas, y las series de Fourier, para señales periódicas, proporcionan un enlace entre dos formas de representar las señales equivalentes, pero muy diferentes. Uno suele estar acostumbrado a representar las señales en el dominio temporal, esto es, su evolución en el tiempo, tal y como se observan en la pantalla de un osciloscopio. Cuando aplicamos la transformada de Fourier obtenemos una representación de la amplitud y la fase de sus componentes espectrales frente a la frecuencia. Al existir uno, y sólo un, espectro para cada función del tiempo, si tenemos una descripción completa de una señal en el dominio temporal la descripción en el dominio frecuencial puede obtenerse de forma exacta y viceversa.

Veamos algunos ejemplos de pares de transformadas básicas:

2.3.3.1. PULSO RECTANGULAR.

El pulso unitario rectangular, $\Pi(t)$, se define de la siguiente manera:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1.0 & \text{si } |t| < 1/2 \\ 0.5 & \text{si } |t| = 1/2 \\ 0 & \text{si } |t| > 1/2 \end{cases}$$

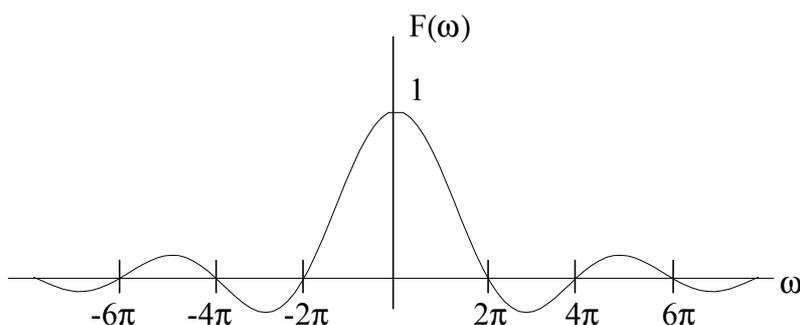


Su espectro sería:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{j\omega} \left[e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2} \right] = \left\{ \frac{\text{sen}(\omega/2)}{\omega/2} = \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{2j} \right\} =$$

$$\frac{\text{sen}(\omega/2)}{\omega/2} = \text{sinc}(\omega/2)$$

Su representación sería:



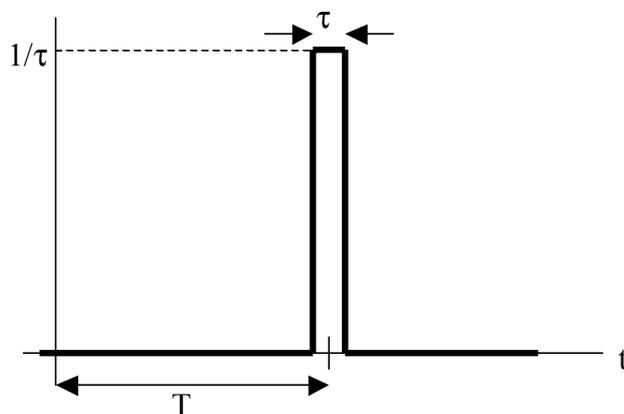
Para un pulso cualquiera, centrado en el tiempo T y de ancho τ , $\Pi\left(\frac{t-T}{\tau}\right)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{T-\tau/2}^{T+\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{T-\tau/2}^{T+\tau/2} = \frac{1}{j\omega} \left[e^{-j\omega(T+\tau/2)} - e^{-j\omega(T-\tau/2)} \right] =$$

$$\frac{1}{j\omega} \left[e^{-j\omega T} e^{-j\omega(\tau/2)} - e^{-j\omega T} e^{j\omega(\tau/2)} \right] = \frac{e^{-j\omega T}}{j\omega} \left[e^{-j\omega(\tau/2)} - e^{j\omega(\tau/2)} \right] = \frac{e^{-j\omega T}}{\omega\tau/2} \text{sen}(\omega\tau/2) = \tau \text{sinc}(\omega\tau/2) e^{-j\omega T}$$

2.3.3.2. FUNCIÓN IMPULSO.

Consideremos un pulso alto y estrecho centrado en el tiempo T , de ancho τ y una amplitud $1/\tau$.



La función impulso o delta de Dirac puede definirse como el límite de este pulso rectangular cuando τ tiende a cero:

$$\delta(t - T) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \Pi\left(\frac{t - T}{\tau}\right)$$

Al estrecharse el pulso se hace más alto. La delta la podemos expresar como:

$$\delta(t - T) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = T \\ 0 & \text{si } t \neq T \end{cases}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T) dt = 1$$

De forma más estricta podemos definir la función impulso por su “propiedad de muestreo”:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T) f(t) dt = f(T)$$

Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, la transformada de Fourier de la función impulso sería:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{F}\left[\frac{1}{\tau} \Pi\left(\frac{t - T}{\tau}\right)\right] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \text{sinc}(\omega\tau / 2) e^{-j\omega T}$$

$$\mathcal{F}[\delta(t - T)] = e^{-j\omega T}$$

Si el impulso se produce para $t=0$:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

2.3.4. Propiedades de la Transformada de Fourier.

- Linealidad (Superposición)

$$\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} = aF(\omega) + bG(\omega)$$

- Dualidad

Si:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$$

Entonces:

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)$$

- Escalado temporal

Si:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$$

Entonces:

$$\mathcal{F}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

- Desplazamiento temporal

Si:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$$

Entonces:

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

- Desplazamiento en frecuencia

Si:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$$

Entonces:

$$\mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0)$$

- Derivación

Si:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$$

Entonces:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = j\omega F(\omega)$$

2.3.5. Convolución.

La convolución entre dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ se define como:

$$z(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (2.36)$$

Esta operación que es de gran interés en el estudio de los sistemas lineales, como se comprobará en el siguiente tema, puede pensarse como un proceso de 5 pasos, mostrados en la Figura 2.16.

- 1) Los argumentos de las funciones son sustituidos por la variable τ . (a y b)
- 2) Una de las dos funciones, en este caso $g(\tau)$, es invertida en el tiempo: $g(-\tau)$. Es un reflejo especular respecto a $t=0$. (c)
- 3) Se introduce una variable de desplazamiento t dando lugar a $g(t-\tau)$. Sería una versión de $g(-\tau)$ desplazada t segundos. (d)

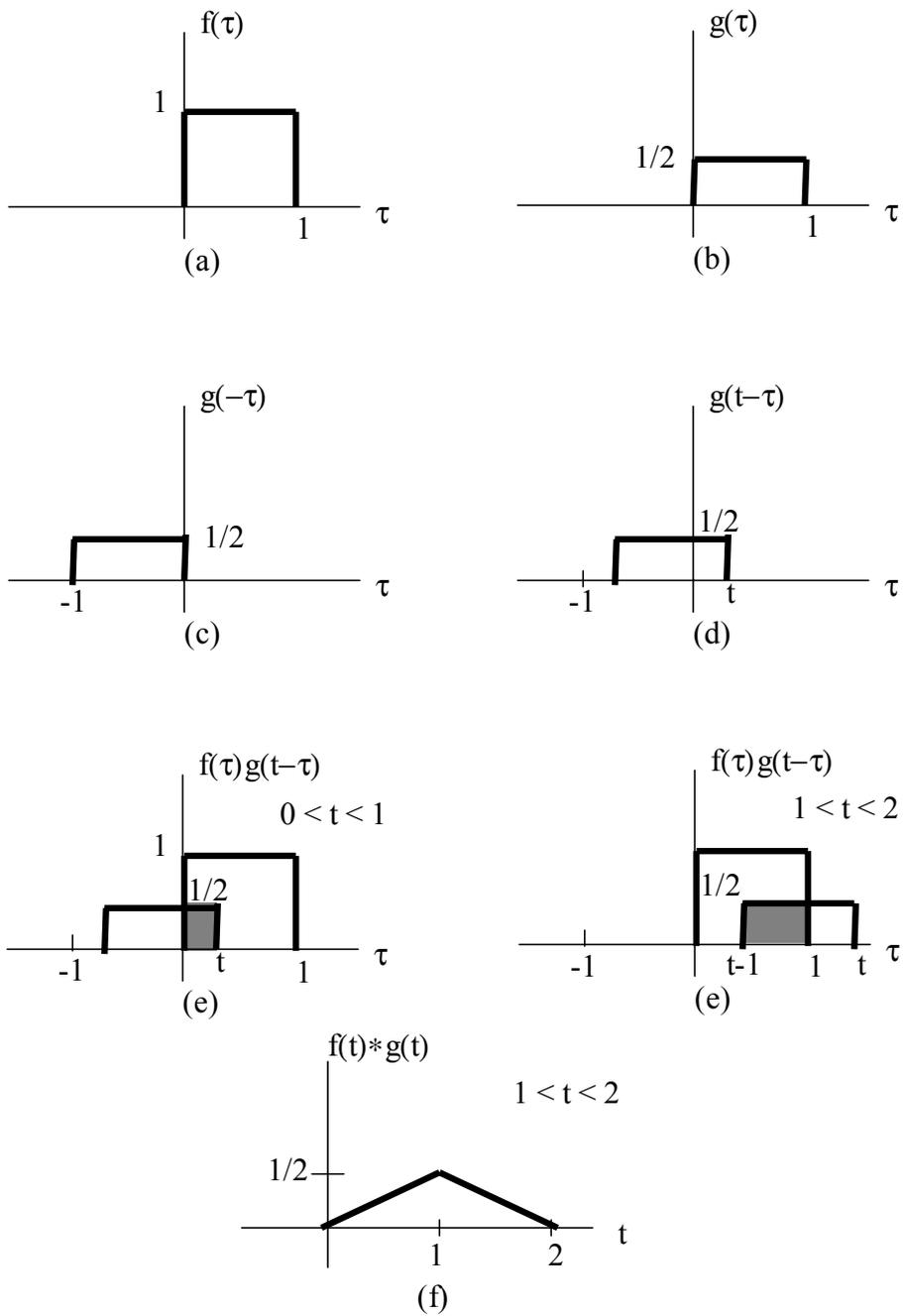


Figura 2.16. Ejemplo gráfico del cálculo de la convolución.

- 4) Se realiza el producto $f(\tau)g(t-\tau)$ para cada valor de t .
- 5) Se calcula la integral en τ de dicho producto, es decir, el área bajo la curva. (e y f)

Para nuestro interés, las propiedades más importantes de la convolución son:

- a) Es conmutativa, asociativa y distributiva respecto a la adición:

$$f * g = g * f$$

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

- b) El operador unitario es la función impulso $\delta(t)$

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

- c) La convolución en el dominio temporal corresponde a una multiplicación en el dominio frecuencial y viceversa.

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = F(\omega)G(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = (1/2\pi)F(\omega) * G(\omega)$$

2.3.6. Teorema de Parseval para señales de energía.

La energía normalizada, es decir, la suministrada a una resistencia de 1Ω , es:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) F(\omega) d\omega$$

Por lo que el Teorema de Parseval queda:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 df \quad (2.37)$$