Tema 3

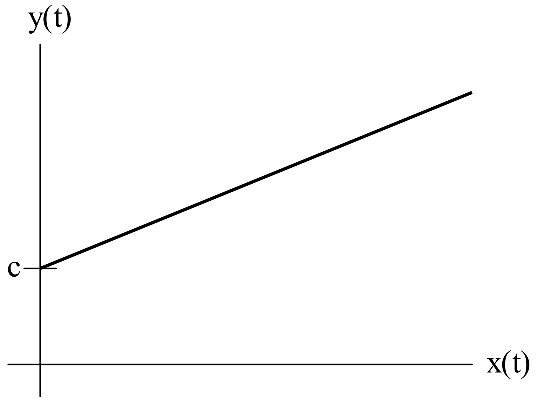
Sistemas lineales.

Podemos definir un sistema como un grupo o combinación de elementos interrelacionados o ínter-actuantes que forman una entidad colectiva. En el contexto de los sistemas de comunicación los elementos ínter-actuantes pueden ser los amplificadores, mezcladores, moduladores, detectores, etc., que son, a su vez, subsistemas formados por resistencias, condensadores, transistores,... Por lo tanto, el conocimiento sobre el comportamiento de esos sistemas y la forma en la que pueden ser descritos es de gran importancia tanto en el análisis como en el diseño de los sistemas de comunicaciones.

3.1. PROPIEDADES E IMPORTANCIA DE LOS SISTEMAS LINEALES.

Los sistemas lineales constituyen una clase restringida de sistemas. Los equipos de comunicaciones están compuestos principalmente por sistemas lineales interconectados.

Es igualmente importante conocer lo que es un sistema lineal como saberlo distinguir de aquellos que no lo son. Supongamos, por ejemplo, un sistema lineal cuya respuesta ante una entrada, x(t), es la salida y(t) de la siguiente forma:



$y(t)=mx(t)+c$

A primera vista podríamos decir que este sistema es lineal, pues la relación entre la entrada y la salida viene dada por una línea recta, sin embrago, es un sistema no lineal, a no ser que la constante c sea cero. Una definición de sistema lineal sería:

“Un sistema es lineal si su respuesta ante la suma de dos entradas cualesquiera es la suma de su respuesta a cada una de las entradas por separado”

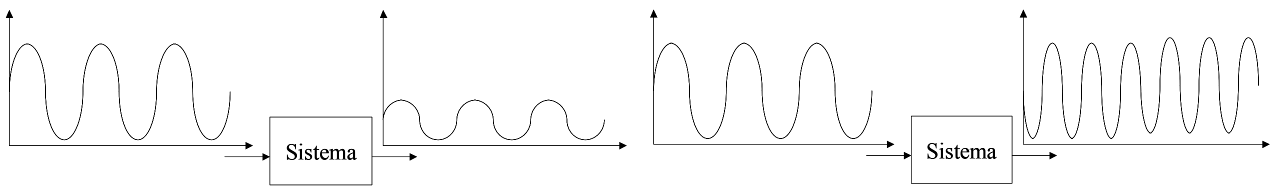
Esta propiedad se suele denominar **principio de superposición** pues las respuestas a las componentes de la entrada están superpuestas a la salida. Esto es, si $x_i(t)$, con n=1,2,..., son las entradas e $y_i(t)$ las correspondientes salidas, entonces la salida del sistema sería $y(t) = \sum_i y_i(t)$ cuando la entrada es $x(t) = \sum_i x_i(t)$.

A partir de la característica anterior se puede deducir la propiedad de **proporcionalidad** de los sistemas lineales: Si la salida del sistema ante una entrada $x_1(t)$ es $y_1(t)$, la salida ante una entrada $x(t)=m\,x_1(t)$ sería $y(t)=my_1(t)$, donde m es una constante.

Con todo lo visto, el sistema considerado anteriormente solamente sería lineal si m=0.

Los sistemas que usamos a menudo son lineales en el rango de trabajo. Los que se desvían un poco del comportamiento lineal los podríamos poner en forma de polinomio $y(t)=ax(t)+bx^2(t)+cx^3(t)+...$, que para señales pequeñas se comportarían como lineales, $y(t)\approx ax(t)$.

Una propiedad **muy importante** de los sistemas lineales es que responden a una entrada sinusoidal con una salida sinusoidal de la misma frecuencia. Un ejemplo de este hecho se muestra en la Figura 3.1.



(a) (b)

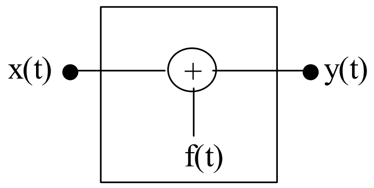
Figura 3.1. Ejemplo de sistema lineal (a) y no lineal (b).

Otra propiedad interesante que suelen poseer los sistemas, lineales o no, es la **invarianza temporal**. Esto significa que la salida del sistema sólo depende de la entrada y no del instante en el que ésta es aplicada, es decir, si $y_1(t)$ es la salida del sistema ante la entrada $x_1(t)$, entonces la salida ante una entrada $x(t)=x_1(t-T)$ sería $y(t)=y_1(t-T)$.

Ejemplo 3.1.

Comprobar si los siguientes sistemas son lineales:

a)



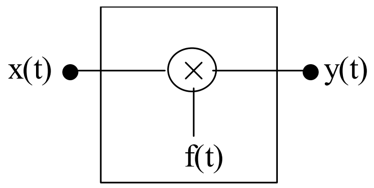
Entrada $x_1(t)$, salida: $y_1(t)=x_1(t)+f(t)$

Entrada $x_2(t)$, salida: $y_2(t)=x_2(t)+f(t)$

Entrada $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$, salida:

$y(t)= x_1(t)+ x_2(t)+f(t) \neq y_1(t)+y_2(t)$ No lineal

b)



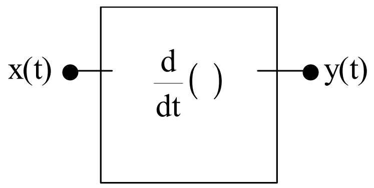
Entrada $x_1(t)$, salida: $y_1(t)=x_1(t)f(t)$

Entrada $x_2(t)$, salida: $y_2(t)=x_2(t)f(t)$

Entrada $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$, salida:

$y(t)=[x_1(t)+x_2(t)]f(t) = y_1(t)+y_2(t)$ Lineal

c)



Entrada $x_1(t)$, salida: $y_1(t)=dx_1(t)/dt$

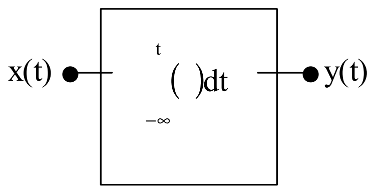
Entrada $x_2(t)$, salida: $y_2(t)=dx_2(t)/dt$

Entrada $x(t)=x_1(t)+ x_2(t)$, salida:

$y(t)= d[x_1(t)+x_2(t)]/dt= dx_1(t)/dt+dx_2(t)/dt = y_1(t)+y_2(t)$

Lineal

d)



Entrada $x_1(t)$, salida: $y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(t')dt'$

Entrada $x_2(t)$, salida: $y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_2(t')dt'$

Entrada $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$, salida:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} [x_1(t') + x_2(t')]dt' = \int_{-\infty}^{t} x_1(t')dt' + \int_{-\infty}^{t} x_2(t')dt'$$

Lineal

3.2. DESCRIPCIÓN EN EL DOMINIO TEMPORAL.

Al igual que en el caso de las señales, los sistemas pueden ser descritos tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia.

3.2.1. Ecuaciones diferenciales lineales.

Cualquier sistema que pueda describirse por una ecuación diferencial lineal de la forma:

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \cdots + a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \cdots + b_M \frac{d^M x(t)}{dt^M}$$

siempre obedece el principio de superposición y es, por tanto, lineal. Si los coeficientes a_i y b_i son constantes el sistema será, además, invariante.

La respuesta de un sistema de este tipo ante una entrada x(t) estará compuesta por dos términos: La componente de respuesta libre, $y_l(t)$, cuando x(t)=0, que correspondería con la solución de la ecuación diferencial homogénea con las condiciones iniciales adecuadas. La segunda componente sería la respuesta forzada, $y_f(t)$, cuando se tiene en cuenta la entrada x(t) pero con todas las condiciones iniciales igual a cero. Por lo tanto:

$$y(t)= y_l(t) + y_f(t) \tag{3.1}$$

También podemos dividir la respuesta en componente estacionaria, $y_e(t)$, y transitoria, $y_t(t)$:

$$y(t)= y_e(t) + y_t(t) \tag{3.2}$$

Siendo el estacionario lo que permanece cuando el tiempo tiende a infinito y el transitorio la componente que tiende a cero cuanto $t \to \infty$.

3.2.2. Ecuaciones diferenciales lineales.

Consideremos un sistema lineal y una entrada discreta (muestreada) de la forma $x_1,x_2,...,x_N$ y que da como resultado una salida $y_1,y_2,...,y_M$. Entonces cada salida puede escribirse como la suma pesada de las entradas:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & & G_{2N} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ G_{M1} & G_{M2} & G_{M3} & \cdots & G_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Es decir, cada salida la podemos poner como:

$$y_i = \sum_{j=1}^{N} G_{ij} x_j \tag{3.4}$$

Además, si el sistema es real, esto es, un sistema físico realizable, entonces $G_{ij}=0$ para todos los valores x_j que tengan lugar después del instante i:

$$y_i = \sum_{j=1}^{i} G_{ij} x_j \tag{3.5}$$

3.2.3. Señales continuas: Convolución y respuesta al impulso.

Si las entradas y salidas discretas son reemplazadas por sus equivalentes continuas, es decir:

$$y_i \to y(t) \qquad x_j \to x(\tau)$$

entonces el sumatorio discreto de la Ecuación 3.5 queda:

$$y(t) = \int_0^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau \tag{3.6}$$

Si la entrada ha comenzado desde hace mucho tiempo y no en el instante t=0:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t G(t,\tau)x(\tau)d\tau \tag{3.7}$$

Los sistemas descritos por estas ecuaciones se denominan **sistemas causales** pues sólo las entradas actuales y pasadas influyen en la salida actual.

Supongamos que reemplazamos la entrada del sistema por una función impulso en el instante T, δ(t-T), obteniendo lo que se conoce como **respuesta al impulso del sistema**:

$$h(t - T) = \int_{-\infty}^t G(t,\tau)\delta(\tau - T)d\tau \tag{3.8}$$

Si usamos la definición de la función impulso, obtenemos:

$$h(t - T) = G(t,\tau) \tag{3.9}$$

Es decir, la función G(t,τ) que hemos supuesto que relaciona la salida con la entrada del sistema no es otra cosa que la respuesta del sistema cuando la entrada es una función impulso. Por lo tanto, la Ecuación 3.7 la podemos poner como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau)x(\tau)d\tau \tag{3.10}$$

Según esto, la salida de un sistema lineal e invariante viene dada por la convolución de la entrada con su respuesta al impulso:

$$y(t)=h(t)*x(t) \tag{3.11}$$

Vamos a interpretar el significado físico de esta ecuación. La señal x(t) puede considerarse como muchos impulsos muy cercanos entre si y donde cada uno de ellos tiene un peso igual al valor de x(t) en ese instante, como se muestra en la Figura 3.2.

De esta forma, la salida del sistema será la suma, esto es, la superposición, de las respuestas a todos los impulsos pesados de la señal de entrada. Esta idea se ejemplifica en la Figura 3.3. Cada impulso al pasar por el sistema da como resultado una respuesta al impulso, pesada por el mismo peso que a la entrada y con el mismo desplazamiento temporal. El conjunto total de respuestas al impulso es sumado para obtener en cada instante la respuesta del sistema ante la entrada total.

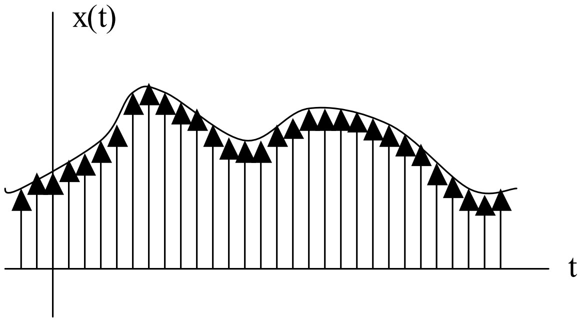


Figura 3.2. Interpretación de una señal como una serie de impulsos muy cercanos entre si.

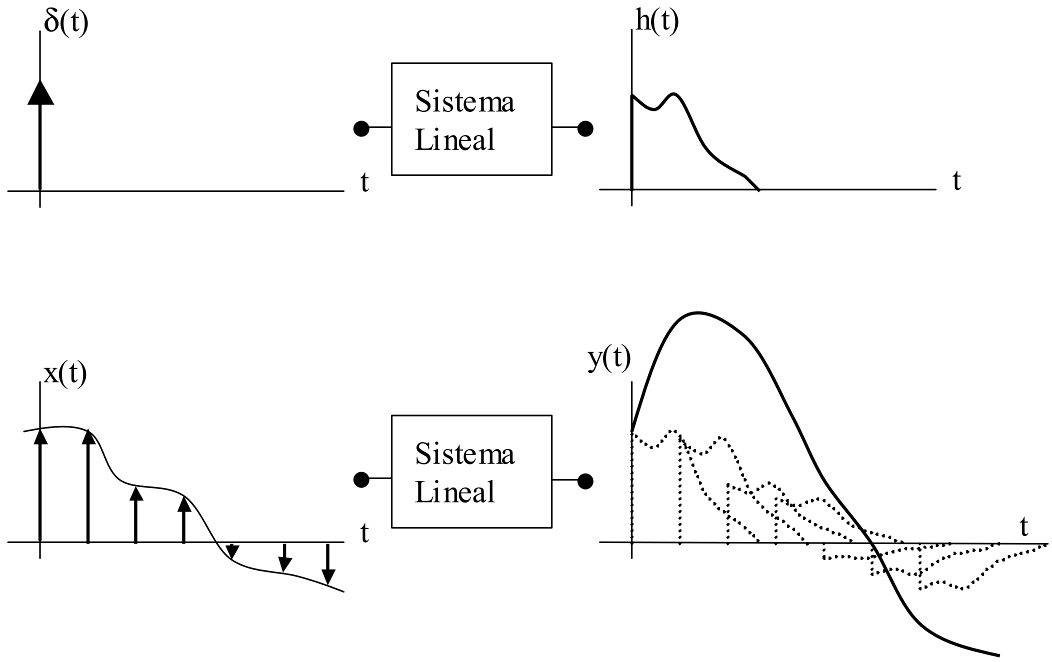
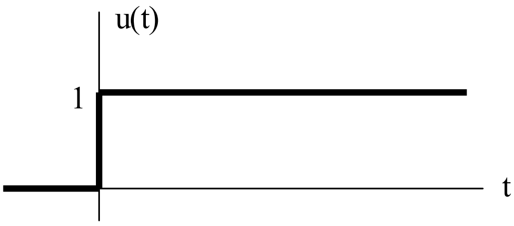


Figura 3.3. Interpretación de la convolución de la entrada a un sistema con la respuesta al impulso del mismo.

3.2.4. Respuesta al escalón.

En la realidad, la medida de la respuesta al impulso de un sistema es difícil de realizar, por lo que se utiliza la respuesta ante una función escalón, definida de la siguiente forma:



$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

La respuesta ante una entrada escalón sería:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} h(\tau)\, 1\, d\tau = \int_{0}^{t} h(\tau)\, d\tau$$

Por lo tanto, la respuesta al escalón es la integral de la respuesta al impulso, y viceversa:

$$h(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Esto quiere decir que si somos capaces de medir la respuesta al escalón del sistema podemos calcular su respuesta al impulso.

3.3. DESCRIPCIÓN EN EL DOMINIO FRECUENCIAL.

La señal de salida del sistema en el dominio frecuancial puede obtenerse aplicando la transformada de Fourier a la Ecuación 3.11:

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{h(t) * x(t)\} = \mathcal{F}\{h(t)\}\mathcal{F}\{x(t)\}$$

es decir:

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega) \tag{3.12}$$

Si $X(\omega)\neq 0$ para todo ω podemos escribir:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \tag{3.13}$$

$H(\omega)$, que es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema, h(t), se denomina **función de transferencia en frecuencia**. En general $H(\omega)$ será compleja y la podremos escribir de la forma:

$$H(\omega)=|H(\omega)|e^{j\theta(\omega)} \tag{3.14}$$

donde

$$\theta(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}\{H(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{H(\omega)\}}\right)$$

La función de transferencia se puede calcular fácilmente en un laboratorio con un generador de señales a la entrada del sistema y un osciloscopio a la salida, realizando un barrido en frecuencia. Si la entrada, para una frecuencia ω_0, es:

$x(t)=A \cos \omega_0 t$

a la salida tendremos:

$y(t)=A\,|H(\omega_0)| \cos (\omega_0 t+\theta(\omega_0))$

Un sistema lineal se comportaría como un filtro, dejando pasar unas componentes de algunas frecuencias mejores que otras. Podemos definir el **ancho de banda** del sistema como la diferencia de frecuencias en las que $|H(\omega)|$ cae por debajo de 3dB respecto al máximo. Esto se muestra en la Figura 3.4.

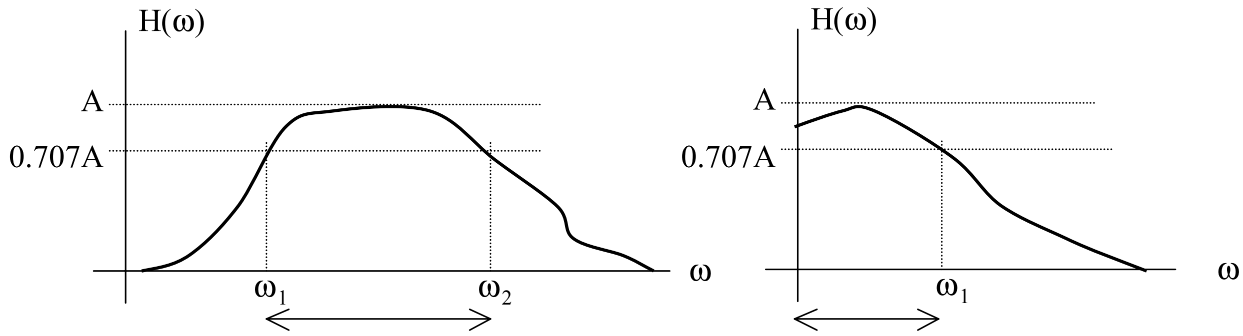


Figura 3.4. Ancho de banda de un sistema.

3.4. TRANSMISIÓN SIN DISTORSIÓN.

Vamos a comprobar qué requisitos debe cumplir un sistema lineal para que se comporte como una línea de transmisión ideal. Queremos transmitir una señal x(t) que introducimos a la entrada y pretendemos obtener a la salida la misma señal, aunque permitimos que posea una magnitud diferente y algún retardo. Por lo tanto, la señal de salida debe ser de la forma:

$$y(t)=K\ x(t-t_0) \tag{3.15}$$

donde K y t_0 son constantes. Si tomamos transformada de Fourier, aplicando la propiedad de desplazamiento temporal:

$$Y(\omega) = K\ X(\omega)e^{-j\omega t_0} \tag{3.16}$$

Con lo que la función de transferencia sería:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = K\ e^{-j\omega t_0} \tag{3.17}$$

Por lo tanto, para permitir una transmisión ideal sin distorsión, la respuesta en frecuencia del sistema debe ser constante en magnitud y el desplazamiento de fase lineal con la frecuencia, esto es, todas las componentes espectrales de la señal deben llegar con el mismo retardo para que se sumen correctamente.

En la práctica, al pasar la señal por ciertos subsistemas puede ser distorsionada, por lo que se utilizan otros subsistemas, denominados ecualizadores, para corregir estas distorsiones.

3.4.1. Filtro ideal.

La construcción de un sistema ideal como el descrito, que posee un ancho de banda infinito, no es realizable. Se puede intentar utilizar un sistema que cumpla las condiciones expuestas en un intervalo de frecuencias determinado, y que no deje pasar el resto de frecuencias. Un sistema de este tipo está representado en la Figura 3.5.

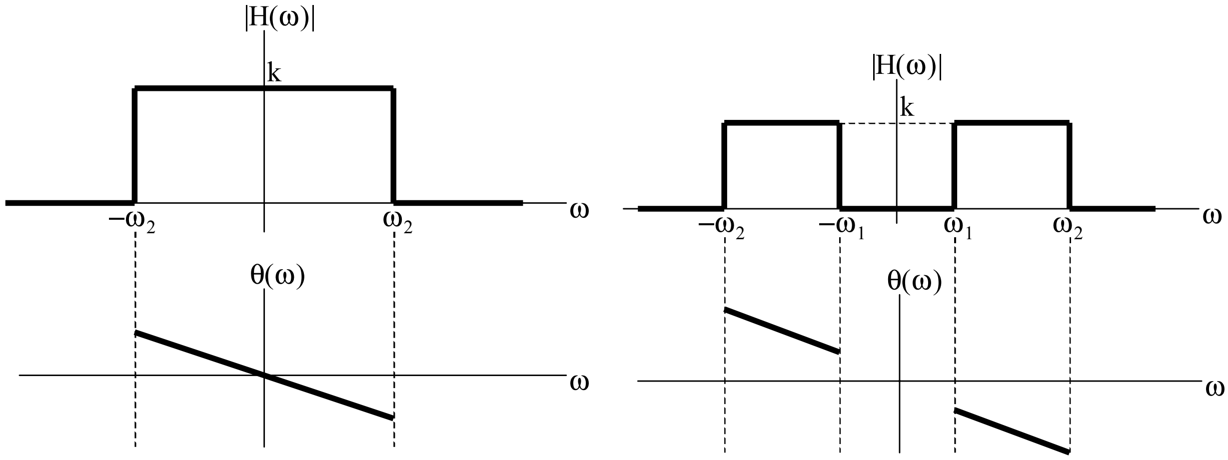


Figura 3.5. Filtro ideal.

El filtro de la derecha de la Figura 3.5 corresponde a un filtro pasa-banda ideal general. Si ω_1 es igual a 0 sería un filtro pasa-baja y cuando $\omega_2 \to \infty$ se convertiría en un filtro pasa-alta.

Un filtro pasa-baja ideal sería de la forma:

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{-j\theta(\omega)}$$

donde

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |\omega| < \omega_2 \\ 0 & \text{si} \quad |\omega| \geq \omega_2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad e^{-j\theta(\omega)} = e^{-j\omega t_0}$$

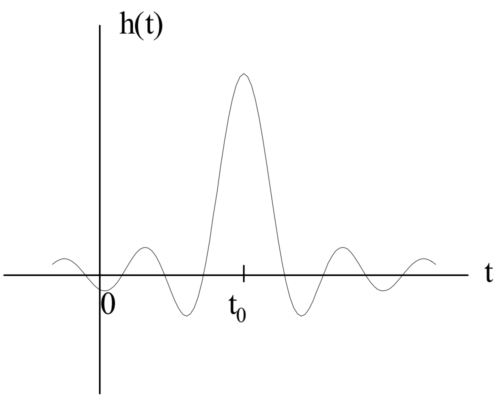
La respuesta al impulso de este sistema sería:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{\omega_2} e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{\omega_2} e^{j\omega(t-t_0)}d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j(t-t_0)}\right]_{-\omega_2}^{\omega_2} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(t-t_0)}\left(e^{j\omega_2(t-t_0)} - e^{-j\omega_2(t-t_0)}\right) = \frac{1}{\pi(t-t_0)}\text{sen}\left(\omega_2(t-t_0)\right) =$$

$$\frac{\omega_2}{\pi}\text{sinc}\left(\omega_2(t-t_0)\right)$$

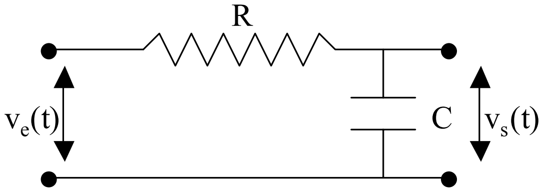
que sería de la forma:



Sería un sistema no causal pues existe respuesta del sistema antes de que se pruduzca la entrada, el impulso en t=0. Por lo tanto, no sería un sistema realizable.

3.4.1. Filtros realizables.

Uno de los filtros pasa-baja más sencillos es el formado por una resistencia R y un condensador C, como se muestra en la siguiente figura:



La tensión de entrada, $v_e(t)$, la podemos poner en función de la carga del condensador, q(t):

$$v_e(t) = R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t)$$

Si aplicamos la transformada de Fourier:

$$V_e(\omega) = j\omega RQ(\omega) + \frac{1}{C}Q(\omega)$$

y la función de transferencia sería:

$$H(\omega) = \frac{V_s(\omega)}{V_e(\omega)} = \frac{\frac{1}{C}Q(\omega)}{j\omega RQ(\omega) + \frac{1}{C}Q(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} - j\frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

con módulo:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + j(\omega RC)^2}}$$

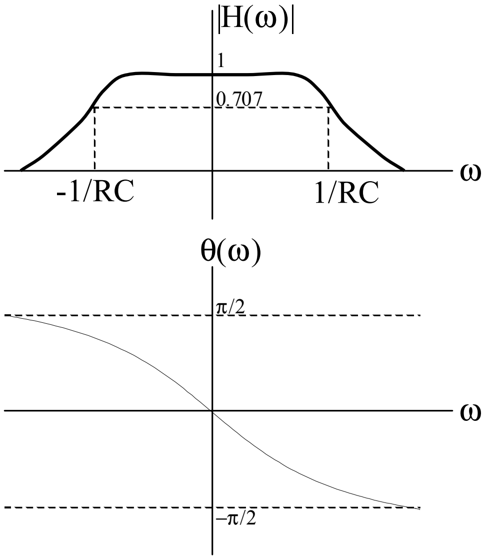
y fase:

$$\theta(\omega) = \mathrm{arctg}(-\,\omega RC)$$

Por lo que:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + j(\omega RC)^2}}\,e^{-j\,\mathrm{arctg}(-\omega RC)}$$

La representación de la función de transferencia se muestra en la siguiente figura:



Una de las aproximaciones más utilizadas al filtro ideal es el denominado filtro de Butterworth, cuyo módulo es de la siguiente forma:

$$\left|H(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}} \quad \text{con n} \geq 1$$

donde ω_c es la frecuencia de corte a 3dB y n es el orden del filtro. Cuando n tiende a infinito el filtro de Butterworth se aproxima al ideal.