

1.- Una variable X es del tipo $Gamma(p, \lambda)$ con p conocido. Basándose en una muestra aleatoria de tamaño n , determinar un estimador de máxima verosimilitud para λ .

2.- Una variable aleatoria X tiene función de densidad igual a:

$$f_{\delta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}, & \text{si } x \in [0, \delta] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hallar un estadístico para estimar el valor desconocido de δ por:

- i) El método de los momentos.
- ii) El método de máxima verosimilitud.

Ver si los estimadores calculados son insesgados y/o consistentes.

3.- Hallar el estimador de máxima verosimilitud para el parámetro θ del cual depende la función de densidad de una variable aleatoria X en los siguientes casos:

i) $f_{\theta}(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}, \theta > -1$

ii) $f_{\theta}(x) = \begin{cases} e^{-x+\theta}, & \text{si } x > \theta \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}, \theta \in R$

iii) $f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}, \theta > 0$

iv) $f_{\theta}(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2}, x > 0, \theta > 0$

4.- Se quiere estimar la proporción, p , de personas que han contraído una determinada enfermedad contagiosa. Se elige una muestra aleatoria de 600 personas a las que se les realiza una prueba. Si la prueba da un resultado positivo, entonces la persona ha contraído la enfermedad. Sin embargo pueden obtenerse falsos positivos; es decir, aunque la persona esté sana, la probabilidad de que la prueba dé positiva es igual a 0.03.

- i) Determinar la estimación de máxima verosimilitud de la proporción de personas que están realmente enfermas si, en las pruebas realizadas, resultaron 125 positivas.
- ii) Si la proporción real de personas enfermas es igual a 0.25, ¿cuál es la probabilidad de que el número de pruebas positivas sea mayor o igual que 110?

5.- Hallar, por el método de los momentos, estimadores para los parámetros siguientes:

- i) Media de una variable de Bernouilli.
- ii) Media de una variable de Poisson.
- iii) Parámetro p de una variable Geométrica.
- iv) Parámetro p de una variable Binomial.

6.- Sea X una variable aleatoria exponencial de parámetro $\frac{1}{\theta}$.

- i) Considerando una muestra aleatoria de tamaño n , hallar estimadores de máxima verosimilitud para θ y θ^2 .

- ii) Se considera una muestra aleatoria de tamaño 2 y el estadístico $T(X_1, X_2) = \frac{X_1 + 2X_2}{3}$.

¿Este estimador es insesgado para θ ? ¿Cuál es su varianza?

7.- Dada una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1+\theta x}{2}, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}, \quad -1 \leq \theta \leq 1$$

- i) Obtener un estimador de θ por el método de los momentos.
- ii) Hallar la varianza del estimador calculado previamente. ¿Es consistente para estimar θ ?

8.- El tiempo de fallo, T , de un determinado aparato es una variable aleatoria cuya función de densidad es:

$$f_{\theta}(t) = \begin{cases} \frac{\theta}{k} e^{-2\theta t}, & t > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \theta > 0$$

- i) Hallar el valor de k .
- ii) Hallar un estimador de máxima verosimilitud para $E(T)$.
- iii) Si se tiene un vector (T_1, \dots, T_n) , cuyas componentes son variables aleatorias independientes y con igual distribución que T , ¿cuál es la probabilidad de que $\sum_{i=1}^n T_i \geq 13,957$ cuando $n=6$ y $\theta = \frac{1}{4}$?

9.- El tiempo de fallo, T , de un determinado sistema electrónico es una variable aleatoria cuya función de densidad es:

$$f_{\theta}(t) = \begin{cases} \frac{2k}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}}, & t > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \theta > 0$$

- i) Hallar el valor de k .
- ii) Hallar un estimador de máxima verosimilitud para $E(T)$. ¿Cuál es el valor de ese estimador para la muestra de tiempos de fallo siguiente: 7.6, 5.8, 7.2, 8.9, 5.6, 7.7, 8.2 (muestra aleatoria de tamaño igual a 7).
- iii) Si se tiene un vector (T_1, \dots, T_n) , cuyas componentes son variables aleatorias independientes y con igual distribución que T , ¿qué significado tiene la variable aleatoria $\sum_{i=1}^n T_i$? ¿Cuál es su esperanza y su varianza? ¿Cuál es la probabilidad de que $\sum_{i=1}^n T_i \geq 15,52$ cuando $n=8$ y $\theta = 2$?

10.- Las diferencias en las medidas de las piezas fabricadas por una determinada máquina, respecto a la medida de la pieza patrón, se ajustan a una distribución $N(\mu, \sigma)$.

- i) Determinar estimadores de máxima verosimilitud y por el método de los momentos para μ y σ .
- ii) ¿Cuáles son las estimaciones de μ y σ para los valores muestrales (en centésimas de milímetros): 1, -2, -1, 3, 0,5, -0,5, 0,75, -0,8, 0,25, -0,3?