1. Sea X una variable uniforme en el intervalo $\left]1,4\right[$. Hallar la función de densidad de $Y=+\sqrt{X}$.

2. Sea X una variable uniforme en el intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Hallar la función de densidad de $Y=sen\ X$. Hallar $P\left\{senX>0,25\right\}$.

3. Sea X una variable exponencial de parámetro 2. Hallar la función de densidad de $Y=\frac{X}{2}+3$. Determinar la función generatriz de momentos de *Y*.

4. Sea X una variable uniforme en el intervalo $\left]e,e^3\right[$. Determinar la función de densidad de $Y=\log X-1$. Hallar la esperanza y la desviación típica de *Y*.

5. Sea X una variable uniforme en el intervalo $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$. Hallar $E\left(tgX\right)$.

6. Sea X una variable exponencial de parámetro 3. Hallar la función generatriz de momentos de $Y=6X-1$. ¿Cuál es la varianza de *Y*?

7. X toma valores elegidos al azar en el intervalo $\left]1,9\right[$. Hallar la función de distribución de $Y=+\sqrt{X}-1$. ¿Cuál es la varianza de e^Y ?

8. Sea X una variable aleatoria uniforme en el intervalo $\left(0,e^2\right)$.

   i) Hallar la función de densidad de $Y=X^2$. Hallar $E(Y)$.
   ii) Hallar la función de densidad de $Y=\ln X$. Hallar $V(Y)$.

9. El tiempo, en horas, que se tarda en reparar una bomba de calor es una variable aleatoria gamma de parámetros $p=2$ y $\lambda=\frac{1}{2}$. Determinar:

   i) La probabilidad de que la reparación requiera, a lo sumo, una hora.
   ii) La probabilidad de que el tiempo de reparación esté entre dos y tres horas.

10. En cierta región, el consumo semanal de energía eléctrica, en cientos de miles de megavatios/hora, es una variable aleatoria gamma con media 6 y varianza 12. Hallar:

    i) Los valores de p y λ.
    ii) La probabilidad de que, en una determinada semana, el consumo de energía esté entre cuatrocientos mil y quinientos mil megavatios/hora.
    iii) ¿Hasta qué cantidad asciende el consumo de energía en el 75% de las semanas?

11. La duración en años de cierto componente eléctrico sigue una variable aleatoria exponencial de media 2,5. Si 485 de estos componentes se instalan en diferentes sistemas:

    i) ¿Cuántos fallarán los dos primeros años?
    ii) ¿Cuántos durarán entre 2 y 6 años?

12. La duración, en años, de la pila de un audífono, es una variable aleatoria de Weibull de parámetros $r=\frac{1}{2}$ y $\lambda=\frac{1}{2}$. Hallar:

    i) La función de distribución.
    ii) Tiempo esperado de duración de la pila.
    iii) Probabilidad de que dure menos de tres años.
    iv) Probabilidad de que dure entre dos y seis años.

13. El tiempo de respuesta de un computador es una variable aleatoria exponencial de media 4 segundos. Hallar:

    i) La varianza.
    ii) Probabilidad de que el tiempo de respuesta sea mayor de seis segundos.
    iii) Probabilidad de que el tiempo de respuesta esté entre ocho y doce segundos.

14. Comprobar que la función generatriz de una variable aleatoria gamma de parámetros (p,λ) es $g(t)=\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-p}$. Hallar la esperanza y la varianza.

15. Comprobar que la función generatriz de una variable aleatoria exponencial de parámetro λ es $g(t)=\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$. Hallar la esperanza y la varianza.

16. Comprobar, utilizando la función generatriz de momentos, que una variable exponencial de parámetro λ es una variable gamma de parámetros $(1,\lambda)$.

17. El tiempo de duración de un determinado condensador es una variable aleatoria gamma de media 4 meses y de desviación típica $\sqrt{8}$ meses. Determinar:

i) La probabilidad de que el condensador dure más de 3 meses.

ii) Probabilidad de que la duración del condensador esté entre 2 y 6 meses.

18. Si *X* es una variable aleatoria *N(0,1)*, hallar la función de densidad de $Y=X^2$ y comprobar que se corresponde con la función de densidad de una Gamma de parámetros $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

19. Dadas X_1 y X_2, variables aleatorias independientes tales que $E(X_1)=E(X_2)=\mu$ y $VAR(X_1)=VAR(X_2)=\sigma^2$, se define $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$ y $S^2=\frac{1}{2}\left((X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2\right)$. Comprobar que:

i) $E(\overline{X})=\mu$, $VAR(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{2}$, $E(S^2)=\frac{\sigma^2}{2}$.

ii) Generalizar los resultados anteriores al caso en que tengamos un vector de n variables independientes con igual media e igual varianza.

20. Si $X_i, \forall i=1,...,n$, es una variable de Bernouilli de parámetro *p* y todas estas variables aleatorias son independientes, se construye $Y=\sum_i X_i$. Hallar $E(Y)$. Hallar $VAR(Y)$.

21. Sea *X* el resultado obtenido al lanzar un dado azul e *Y* el número obtenido al lanzar un dado violeta. Encontrar $E(X+Y-XY)$ y $VAR(X-Y)$.

22. El tiempo de fallo, *T*, de un determinado sistema electrónico es una variable aleatoria cuya función de densidad es:

$$f_\theta(t)=\begin{cases} ke^{-\frac{t}{\theta}}, t>0 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}, \qquad \theta>0$$

i) Hallar el valor de k.

ii) Si se tiene un vector $(T_1,....,T_n)$, cuyas componentes son variables aleatorias independientes y con igual distribución que T, ¿qué significado tiene la variable aleatoria $\sum_{i=1}^{n}T_i$?¿Cuál es su esperanza y su varianza?¿Cuál es la probabilidad de que $\sum_{i=1}^{n}T_i\geq 12,42$ cuando n=6 y $\theta=2$?

23. El error cometido por un determinado aparato de medida es una variable aleatoria *X* con función de densidad igual a:

$$f_\sigma(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, -\infty<x<\infty$$

Si se consideran las variables $X_1,...,X_{10}$, independientes e idénticamente distribuidas que *X*, hallar $P\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 6,77\right)$.

24. El tiempo de fallo, *T*, de un determinado aparato es una variable aleatoria cuya función de densidad es:

$$f_\theta(t) = \begin{cases} \frac{ke^{-\theta t}}{\sqrt{t}}, t > 0 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases} \quad , \qquad \theta>0$$

- i) Hallar el valor de k.
- ii) Si se tiene un vector $(T_1,....,T_n)$, cuyas componentes son variables aleatorias independientes y con igual distribución que T, ¿cuál es la probabilidad de que $\sum_{i=1}^{n} T_i \geq 7{,}847$ cuando $n = 10$ y $\theta = \frac{1}{2}$?

25. Un profesor realiza un test de 100 preguntas a un curso de 200 alumnos. Suponiendo que las puntuaciones *X* obtenidas por los alumnos siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, se pide calcular:

- i) $P(X \geq 70)$.
- ii) $P(X \leq 80)$.
- iii) $P(X > 46)$.
- iv) $P(39 \leq X \leq 80)$.
- v) $P(|X - 60| < 20)$.
- vi) $P(|X - 60| > 30)$.
- vii) Número de alumnos que tuvieron más de 75 puntos.
- viii) ¿Cuál fue la nota que sobrepasaron el 20% de los alumnos?

26. Sea *X* una variable aleatoria con función de densidad igual a:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \frac{\lambda^4}{6} e^{-\lambda x} x^3, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$$

- i) Determinar la función generatriz de momentos. Hallar $E\left(X\right)$ y $Var\left(X\right)$.
- ii) Sea $Y = 2\lambda X$. Hallar *a* tal que $P\left(Y > a\right) = 0,6$.

27. Sea *X* una variable aleatoria uniforme en el intervalo $\left(1, e^4\right)$. Sea $Y = \frac{\log X}{2}$ (logaritmo neperiano). Hallar la varianza de *Y*.

28. Dada una constante $\lambda > 0$, sea *X* la variable aleatoria cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x}{\lambda^2}}, \ x > 0 \\ 0, \ x \leq 0 \end{cases}$$

- i) Hallar el valor de *k*. Hallar $Var\left(X\right)$.
- ii) Hallar la función de densidad de $Y = \frac{X}{\lambda^2}$. Determinar la función generatriz de momentos y la varianza de *Y*.